



Dynamique et stabilité d'un système discret en présence de contact et de frottement

Stéphanie Basseville

► To cite this version:

Stéphanie Basseville. Dynamique et stabilité d'un système discret en présence de contact et de frottement. Mécanique [physics.med-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2004. Français. NNT: . tel-00011976

HAL Id: tel-00011976

<https://theses.hal.science/tel-00011976>

Submitted on 18 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE II

Spécialité

Mécanique des solides

présentée et soutenue publiquement

par

Stéphanie Basseville

le 14 décembre 2004

**Dynamique et stabilité
d'un système discret en
présence de contact et de frottement**

Directeur de thèse : Alain Léger

Jury

<i>Président</i>	Monsieur	Quoc Son	Nguyen	<i>Directeur de Recherche, CNRS</i>
<i>Rapporteurs</i>	Madame	Raphaèle	Herbin	<i>Professeur, Aix-Marseille I</i>
	Monsieur	Bernard	Brogliato	<i>Directeur de Recherche, INRIA</i>
<i>Examineurs</i>	Monsieur	Michel	Jean	<i>Directeur de Recherche, CNRS</i>
	Monsieur	Claude-Henri	Lamarque	<i>Professeur, ENTPE</i>
	Monsieur	Alain	Léger	<i>Directeur de Recherche, CNRS</i>
	Monsieur	Pierre Brice	Wieber	<i>Chargé de Recherche, INRIA</i>

REMERCIEMENTS

Ce travail de recherche s'est effectué au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille dirigé par Michel Raous. A mon arrivée, j'ai intégré l'équipe *Modélisation Mécanique du Contact et Biomécanique* dont le responsable était Patrick Chabrand. Un beau jour, il a décidé de se rapprocher des calanques, emportant avec lui le B. C'est Fred Lebon qui en nous rejoignant peu de temps après a pris la responsabilité de l'équipe devenue MMC.

Mes premiers remerciements s'adressent à quatre personnes qui furent présentes durant cette thèse.

Elaine était là au début de ces travaux. Mais ses responsabilités professionnelles l'ont malheureusement éloigné du laboratoire. Je garde un très bon souvenir des moments partagés.

Entre deux croisières et deux cours de "jumbe", Michel Jean m'a proposé des idées plus originales les unes que les autres. Il est à l'origine de nouvelles notions présentées dans ce manuscrit. C'est avec plaisir que je le compte parmi les membres du jury.

J'aimerais qu'il existe un mot plus fort que Merci pour toi Ballard. Ce fut un véritable plaisir de travailler avec toi (même si tu m'as souvent intoxiqué avec tes cigarettes).

Et puis la dernière personne qu'il ne faut pas que j'oublie c'est Alain, mon directeur de thèse. On connaît tous son rôle alors je me contenterai juste de lui dire merci pour tout.

Raphèle Herbin et Bernard Brogliato ont bien voulu accepter la tâche de rapporteur. Qu'il me soit permis de les remercier pour le temps qu'ils ont consacré.

Je souhaite également remercier Quoc Son Nguyen pour m'avoir accepté la présidence du jury et Claude-Henri Lamarque pour avoir participé au jury.

J'ai rencontré Pierre-Brice lors d'une école thématique. Je me souviens de ces explications rigoureuses concernant le "jeu du menteur". A cette époque, j'étais loin de me douter que je te compterai parmi les membres du jury. Sache que cela me fait beaucoup plaisir.

C'est avec joie mais aussi regret que je quitte l'équipe MMC :

- Joie puisque je pars pour Buno. Je vais enfin retrouver ma moitié pour planer...
- Regret car c'est bien la première fois que je n'allais pas au boulot à reculons. Il m'était fort agréable de partager le café quotidien.

Il m'est impossible d'oublier mon colloc préféré, Damien, avec qui on a beaucoup partagé pendant ces trois années. Comme de nombreux couples, l'heure de la rupture est arrivée. Cette rupture ne sera pas facile à vivre.

Et puis tout simplement un grand merci à ma moitié pour m'avoir supporté tout au long de ce périple. Encore des milliers, des millions, des milliards de merci à toi qui a su me changer les idées en me faisant planer, comme tu sais si bien le faire, dans cet immense ciel bleu parsemé de cumulus.

Et enfin merci à tous ceux qui sont venus le 14 décembre me soutenir dans ce dur moment ...

Table des matières

Introduction	3
<hr/>	
I Formulation du problème d'évolution	7
<hr/>	
I.1 Description du problème et notations	9
I.2 La loi de frottement de Coulomb	10
I.2.1 Formulation classique de la loi de Coulomb	10
I.2.2 Formulation variationnelle	11
I.2.3 Formulation en terme de sous différentiel	12
I.2.3.1 Quelques rappels d'analyse convexe	12
I.2.3.2 Ecriture équivalente en terme de sous différentiel	13
I.2.4 Autre formulation de la loi de Coulomb	13
I.2.5 Formulation finale du problème d'évolution	14
II Approximation des solutions	17
<hr/>	
II.1 Introduction	19
II.2 Problème discrétisé	19
II.3 Principe de la méthode "NSCD"	22
II.4 Algorithme de résolution	25
II.5 Construction des suites d'approximation	27
II.6 Obtention d'estimations uniformes sur la suite d'approximation	27
II.6.1 Estimation sur la vitesse approchée	27
II.6.2 Estimation sur la variation de la vitesse approchée	30
II.7 Convergence de la suite d'approximation	32
II.7.1 Définition et convergence d'une sous-suite	32
II.7.2 Propriétés de la limite	34
III Résultats d'unicité	35
<hr/>	
III.1 Introduction	37

III.2 Contre-exemple à l'unicité pour le problème à un degré de liberté	37
III.2.1 Le problème à un degré de liberté	37
III.2.2 Cas de la loi d'impact élastique	38
III.2.3 Cas d'une loi d'impact complètement inélastique	40
III.3 Cas d'un système masse-ressort et du système de Klarbring	45
III.3.1 Prise en compte d'un ressort	45
III.3.2 Application au système de Klarbring	50
III.4 Existence et unicité pour le contact unilatéral avec frottement de coulomb en dynamique : un problème modèle	50
III.5 Conséquences	70

IV Stabilité des solutions d'équilibre	71
---	-----------

IV.1 Rappel du problème d'évolution dans \mathbb{R}^2	73
IV.2 Exploration des états d'équilibre	73
IV.3 Stabilité des états d'équilibre	78
IV.3.1 Introduction	78
IV.3.2 Lemmes préliminaires	78
IV.3.3 Stabilité de tous les équilibres	95
IV.3.4 Conclusion	120
IV.4 Illustrations numériques	121
IV.4.1 Introduction	121
IV.4.2 Paramètres du problème	121
IV.4.3 Stabilité des états d'équilibre	121
IV.4.3.1 Le cas $A < 0$	122
IV.4.3.2 Le cas $A = 0$	123
IV.4.4 Le cas $A > 0$	127
IV.5 Vers de nouvelles notions de stabilité	131
IV.5.1 Introduction	131
IV.5.2 Définitions	131
IV.5.3 Nouveaux résultats de stabilité	132
IV.5.4 Illustrations numériques	139
IV.5.4.1 Introduction	139
IV.5.4.2 Force constante	139
IV.5.4.3 Force analytique ou analytique par morceaux	141

Conclusion	143
-------------------	------------

Références bibliographiques	145
Index des notations	149

INTRODUCTION

Le sujet de ce travail est l'étude de la stabilité des états d'équilibre d'un système dynamique simple en présence de contact unilatéral et de frottement de Coulomb. Sur l'ensemble, on se focalise sur un modèle simple de type masse-ressort, bien que certains des résultats puissent être étendus à \mathbb{R}^n . Concernant la modélisation du contact et du frottement, le parti est pris de ne considérer que les lois strictement unilatérales, hors de toute régularisation.

On résume ci-après, chronologiquement, quelques étapes récentes de l'obtention de résultats de stabilité.

En 1991 dans [7, 8], Chateau et Nguyen ont étudié la stabilité d'un milieu continu en présence de contact et de frottement de Coulomb. Dans le cas où le frottement n'était pas pris en compte, ils utilisaient une version du théorème de Lejeune-Dirichlet pour obtenir un critère de stabilité. Dans le cas avec frottement, ils ont établi une condition de non bifurcation et un critère de stabilité avec un potentiel de dissipation pour la description du frottement sec et en procédant de façon similaire à ce qui avait été fait par R. Hill en plasticité. Ce critère de Hill [11, 12] se voulait adapté aux systèmes dissipatifs et énonçait qu'une position d'équilibre est stable si dans toute perturbation l'agent perturbateur doit fournir un travail positif. Le résultat obtenu dans [8] a été très utilisé dans plusieurs travaux ultérieurs.

Dans le cas discrétisé, des analyses de stabilité ont été effectuées en utilisant différents types de linéarisation. Les graphes non régularisés de la loi de Coulomb et du contact unilatéral n'étant pas linéarisables, ces analyses ont dû être menées avec précaution. Dans [3, 15], Barbarin et *al* ont caractérisé les éventuelles apparitions d'instabilités lors d'évolutions quasi-statiques pour un problème discrétisé en s'appuyant sur des critères énergétiques issus de la formulation proposée par Chateau et Nguyen. Dans [18, 31, 32, 33], Vola et *al* ont supposé que la dynamique ne modifiait pas l'état de contact et de frottement. Ainsi l'analyse de stabilité revenait à une analyse usuelle des valeurs propres d'un système dynamique régulier avec un opérateur linéarisé.

Deux types de commentaires sont suggérés pour ce travail. Tout d'abord énoncer que la dynamique ne modifie pas le statut du système par rapport aux contraintes unilatérales, et donc en déduire un problème aux valeurs propres classique, est une hypothèse restrictive, bien que vraisemblablement satisfaite pour la plupart des systèmes usuels, par exemple pour la discrétisation en éléments finis, si l'évolution est étudiée pendant un intervalle de temps

suffisamment court. Pour une analyse de stabilité, cette hypothèse revient à ne choisir que des perturbations très particulières. On pourrait observer que, si cette analyse des valeurs propres conduit à l'instabilité dans cette classe très particulière de perturbations, le système sera a fortiori trouvé instable si toutes les perturbations admissibles avaient été prises en compte. Mais cela aussi doit être pris avec précaution car les résultats sur la stabilité d'un système linéarisé et celle du problème non linéaire correspondant ne sont pas établis pour des non linéarités unilatérales, et il faudrait par exemple montrer que la trajectoire, après avoir initialement divergé de l'équilibre, ne s'en rapproche pas au point de rentrer dans tout voisinage de l'équilibre après un temps assez long.

Plus récemment, F. Moiré [20] est revenu sur l'étude de la stabilité d'un système simple de type masse-ressorts. Choissant des valeurs des paramètres telles qu'il y ait existence d'une solution d'équilibre (on verra dans ce qui suit que, pour les valeurs des paramètres choisies, il y en a justement une infinité), l'étude qu'il a proposée s'appuie sur deux arguments, que la suite permettra également de discuter :

- soit les perturbations de l'état d'équilibre sont glissantes, soit elles rompent le contact ;
- dans le cas où elles sont glissantes, il existe un intervalle de temps sur lequel la particule reste en contact.

Comme on le verra, ces deux points sont corrects si la force est constante ou très régulière. Dans le travail dont il est question ici, ces deux points motivaient le fait que, l'état de contact étant figé, l'analyse de stabilité était celle d'un système linéaire.

Récemment un résultat d'instabilité a été obtenu dans [9, 16] également par une analyse de valeurs propres. Martins et *al* ont montré dans ce travail que sous certaines conditions sur les valeurs propres d'un opérateur linéarisé toutes les solutions partant d'un voisinage d'un état d'équilibre dans un espace (réactions, vitesses) quittent ce voisinage avant de quitter la région d'admissibilité dans laquelle les hypothèses de linéarisation sont vérifiées. Plusieurs commentaires faits à propos du travail de Vola et *al* s'appliqueraient également à ce travail, mais le résultat d'instabilité, locale en temps, est ici obtenu très minutieusement.

Plusieurs références récentes dans ce domaine peuvent être trouvées dans [17].

Les travaux précédemment cités supposent l'existence de la trajectoire. Lorsque les auteurs utilisent des arguments énergétiques pour caractériser un état d'équilibre, un argument d'unicité n'est pas nécessaire en général pour parler de stabilité. En revanche un argument d'unicité de la trajectoire est évidemment nécessaire si l'obtention d'un résultat de stabilité est envisagé par l'intégration d'un problème de Cauchy. Différents travaux concernant ce sujet ont été publiés durant ces dernières années.

Le travail de A. Klarbring [14] a été très important sur ce point. Etudiant l'évolution quasi-statique d'un modèle simple en présence de contact et de frottement, il a montré qu'en fonction des données, le problème peut posséder une unique solution, une multitude de solutions ou aucune solution.

L'existence d'une solution au problème dynamique dans le cas avec frottement a été montrée par Monteiro-Marques dans [21]. Ce résultat d'existence a été obtenu en supposant que les données sont bornées. Un résultat d'existence a été également obtenu par D. Stewart par la convergence d'une discrétisation en temps dans [29, 30].

Dans [26], M. Schatzman s'est intéressée à la dynamique d'un système à un degré de li-

berté avec contraintes unilatérales sans frottement et a prouvé un résultat d'existence. Elle a ensuite montré qu'il n'y a pas unicité si les données sont C^∞ . Percivale [25] puis M. Schatzman [27] ont montré, toujours pour un problème à un degré de liberté avec contact unilatéral sans frottement, que la solution est unique si les données sont analytiques. Par la suite, ce résultat a été étendu par P. Ballard [1] à un nombre arbitraire fini de degrés de liberté avec contraintes unilatérales toujours sans frottement.

Dans le présent travail, on revient à l'étude du modèle simple que constitue le système de Klarbring [14], système qui avait d'ailleurs également été proposé par M. Jean. Afin de discuter sans ambiguïté la stabilité d'états d'équilibre, les questions d'existence et d'unicité sont abordées au préalable. Relativement aux travaux que nous venons de citer, l'approche présentée dans ce qui suit a l'originalité de n'étudier la stabilité qu'après avoir établi les conditions sous lesquelles le problème dynamique est bien posé. L'application des théorèmes classiques de stabilité n'étant pas possible pour ce type de problème, on revient à la définition de la stabilité en étudiant l'évolution en temps de la distance entre une solution d'équilibre et la trajectoire solution d'un problème de Cauchy avec des données hors d'équilibre. Ce travail comporte quatre chapitres.

- Le chapitre I décrit le problème étudié. On commence par rappeler les différentes formulations de la loi de frottement de Coulomb pour un point matériel. On montre que les formulations rappelées sont équivalentes. Cela se conclut par une formulation précise du problème considéré.

- Après ce premier chapitre introductif, l'existence de solutions pour le système de Klarbring est établie par la convergence d'une discrétisation en temps au chapitre II. Le point essentiel de la preuve utilise un résultat de Monteiro-Marques [21], légèrement adapté pour avoir existence avec des données dans L^1 .

- Le chapitre III est consacré à la question de l'unicité. Il comporte deux parties : dans la première partie, on montre en reprenant une construction proche de celle proposée par M. Schatzman [27] puis par P. Ballard [1], que l'on ne peut espérer l'unicité même avec des données C^∞ . Cela est obtenu grâce à un contre-exemple. Dans la seconde partie, on montre que l'on a unicité si les données sont analytiques [2]. On conclut en particulier à l'issue de cette partie, à la convergence de l'algorithme "NonSmooth Contact Dynamics" issu des travaux de M. Jean et J.J. Moreau [13].

- Le chapitre IV étudie la stabilité des positions d'équilibre. Tout d'abord, l'ensemble des solutions d'équilibre est déterminé en fonction des données du problème dans le cas où les forces ne dépendent pas du temps. Ce résultat est simple à obtenir. Il est cependant intéressant d'observer que, en fonction des données, un système discret même dans \mathbb{R}^2 , avec contact unilatéral et frottement de Coulomb, possède un seul état d'équilibre, ou deux, ou une infinité ; d'observer d'autre part que même dans le cas d'unicité, l'état d'équilibre peut être en contact ou décollé ; qu'un état d'équilibre décollé peut coexister avec un état en contact ; que l'on peut avoir une infinité de solutions toutes en glissement imminent ; que plusieurs types d'infinités d'états d'équilibre en contact bloqué peuvent être obtenues. Et il est également intéressant d'observer que, les forces extérieures étant données, on passe de l'une à l'autre de ces situations lorsque varient le coefficient de frottement ou les paramètres

de rigidité.

La question de l'existence et de l'unicité abordée au préalable assure le caractère bien posé de la dynamique. A la différence des travaux antérieurs de stabilité, l'étude proposée ici ne se base donc que sur une intégration directe de la dynamique à partir de données voisines de l'équilibre. On obtient ainsi des résultats de stabilité pour tous les états d'équilibre possibles, l'état d'équilibre étant perturbé dans un espace de phases habituel. L'observation de la dynamique, en particulier dans l'espace des réactions, montre toutefois que certaines caractéristiques sont mal décrites par les résultats de stabilité obtenus. Ceci nous amène à introduire deux nouvelles notions de stabilité, prenant en compte des perturbations des forces, c'est-à-dire formellement du second membre et non des données initiales de Cauchy. Il semble que ce soit là une caractéristique générale de la dynamique de ces problèmes unilatéraux.

Chapitre I

FORMULATION DU PROBLÈME D'ÉVOLUTION

RÉSUMÉ

L'objectif de ce chapitre est de proposer une formulation précise du problème d'évolution d'un système discret avec contact unilatéral et frottement de Coulomb. Après une brève présentation du système mécanique dont l'étude sera l'objet de tout ce travail, et l'introduction de quelques concepts, l'essentiel est consacré à la loi de frottement. Plusieurs formulations classique ou variationnelles, en sont données, avec des résultats d'équivalence entre elles. On donne finalement la formulation précise du problème d'évolution que l'on étudiera.

I.1 Description du problème et notations

Soit $n \geq 2$ un entier arbitraire. On considère une particule ponctuelle dans \mathbb{R}^n , de masse m , évoluant dans un potentiel élastique quadratique, défini par une matrice de rigidité \underline{K} symétrique définie positive. Cette particule subit, également, l'action d'une force extérieure $\underline{F}(t)$ ne dépendant que du temps. Enfin, la présence d'un obstacle rigide contraint la particule à rester dans un demi-espace.

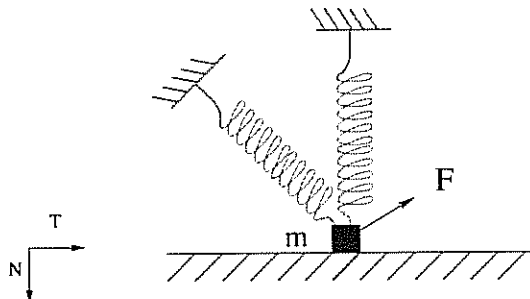


FIG. I.1 – *Système de Klarbring*

La position de la particule sera repérée par $\underline{U}(t) \in \mathbb{R}^n$ et le système de coordonnées (orthogonales) sera choisi de sorte que la liaison unilatérale s'exprime à l'aide de la première composante $U_N(t)$ (« composante normale ») de $\underline{U}(t)$ sous la forme :

$$\forall t, \quad U_N(t) \leq 0.$$

De manière générale, si \underline{X} est un vecteur de \mathbb{R}^n , on notera X_N sa première composante (« composante normale ») et \underline{X}_T le vecteur défini par ses $n - 1$ dernières composantes (« composantes tangentielles »). Pour la matrice de rigidité, on notera :

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} K_N & \underline{W}^t \\ \underline{W} & \underline{\underline{K}}_T \end{pmatrix}$$

où $K_N \in \mathbb{R}$, $\underline{W} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\underline{\underline{K}}_T$ est une matrice carré réelle symétrique d'ordre $n - 1$. Le terme \underline{W} est un terme de couplage entre les degrés de liberté normal et tangentiels.

Les deux assertions suivantes sont alors équivalentes :

- (i) $\underline{\underline{K}}$ est définie positive,
- (ii) $\underline{\underline{K}}_T$ est définie positive et $K_N > \underline{W} \cdot \underline{\underline{K}}_T^{-1} \cdot \underline{W}$.

L'évolution dynamique de la particule sur un intervalle de temps $[0, \hat{T}]$ satisfait donc :

$$m\ddot{\underline{U}}(t) + \underline{\underline{K}}\underline{U}(t) = \underline{F}(t) + \underline{R}(t), \quad (\text{I.1})$$

$$U_N(t) \leq 0, \quad R_N(t) \leq 0, \quad U_N(t)R_N(t) = 0, \quad (\text{I.2})$$

où \underline{R} est la réaction exercée par l'obstacle sur la particule. Du fait de la présence de l'obstacle, on doit s'attendre à ce que l'évolution dynamique du système présente des discontinuités de vitesse (un instant t où la vitesse présente une discontinuité sera appelé dans toute la suite instant d'impact). Il en résulte que l'équation du mouvement (I.1) ne peut certainement pas être satisfaite au sens classique et devra donc être entendue au sens des distributions. En

particulier, la réaction \underline{R} est une distribution dont la composante normale R_N est négative. Or, on montre facilement qu'une distribution négative est nécessairement une mesure. Dans toute la suite, on notera $\mathcal{M}([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$ l'espace des mesures sur $[0, \hat{T}]$ à valeur dans \mathbb{R}^n . Par définition, il s'agit du dual topologique de l'espace de Banach $\mathcal{C}^0([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$.

Définition I.1

On note $MMA([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$ (“motions with measure acceleration”) l'espace vectoriel des distributions sur $[0, \hat{T}]$, à valeur dans \mathbb{R}^n , dont la dérivée seconde est une mesure.

Les éléments de MMA sont donc des primitives de fonctions à variation bornée et s'identifient donc à des fonctions continues. Les fonctions à variation bornée admettant une limite à gauche et à droite en tout point, on montre facilement à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que toute fonction $\underline{U} \in MMA([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$ admet des dérivées, au sens classique, $\underline{U}^-(t)$ et $\underline{U}^+(t)$, à gauche et à droite de tout instant $t \in]0, \hat{T}[$. Au final, (I.1) et (I.2) ont bien un sens pour $\underline{U} \in MMA([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$ et $\underline{R} \in \mathcal{M}([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$. Classiquement, ces équations doivent être complétées par une loi d'impact et la dynamique s'écrit maintenant :

$$m\ddot{\underline{U}} + \underline{K}.\underline{U} = \underline{F} + \underline{R} \quad (\text{I.3})$$

$$U_N \leq 0, \quad R_N \leq 0, \quad U_N R_N = 0 \quad (\text{I.4})$$

$$U_N(t) = 0 \implies \dot{U}_N^+(t) = -e\dot{U}_N^-(t), \quad (\text{I.5})$$

où $e \in [0, 1]$ est le coefficient de restitution, supposé connu. Le cas $e = 1$ correspond à la loi d'impact élastique et le cas $e = 0$ à celui de la loi d'impact complètement inélastique.

L'introduction de $MMA([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$ pour donner un sens aux équations régissant l'évolution d'un tel système remonte aux travaux de Schatzman [26] et Moreau [23, 24].

Le système (I.3) (I.4) (I.5) est encore incomplet. Il faut lui ajouter des conditions portant sur la composante tangentielle \underline{R}_T de la réaction.

Le cas du contact parfait (sans frottement) s'écrit $\underline{R}_T = 0$. Cependant, on souhaite ici prendre en compte le frottement sec dans l'interaction de la particule avec l'obstacle. La loi phénoménologique la plus simple décrivant le frottement sec est la loi de Coulomb dont diverses formulations sont détaillées dans la section suivante.

I.2 La loi de frottement de Coulomb

Classiquement, la loi de Coulomb se formule en terme de la valeur de la réaction \underline{R} (supposée donc être une fonction) à un instant donné et de la vitesse à droite \underline{U}^+ au même instant.

I.2.1 Formulation classique de la loi de Coulomb

On dit que le contact entre la particule et l'obstacle s'effectue avec frottement de Coulomb si \underline{U}_T^+ et \underline{R} vérifient :

$$\|\underline{R}_T\| \leq -\mu R_N, \quad \text{et} \quad \begin{cases} \|\underline{R}_T\| < -\mu R_N, \implies \underline{U}_T^+ = 0, \\ \|\underline{R}_T\| = -\mu R_N, \implies \exists \lambda \geq 0, \underline{R}_T = -\lambda \underline{U}_T^+, \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme Euclidienne. Le coefficient μ , appelé coefficient de frottement, est un nombre réel positif. Le cas $\mu = 0$ correspond à la situation de contact parfait (ou sans frottement).

L'inégalité (I.6) indique que la réaction se trouve dans le cône convexe de révolution K_μ , d'axe dirigé suivant N et d'angle φ , avec $\tan \varphi = \mu$:

$$K_\mu = \{\underline{R} \in \mathbb{R}^n, \|\underline{R}_T\| \leq -\mu R_N\}.$$

I.2.2 Formulation variationnelle

On rappelle ici une formulation équivalente de la loi de Coulomb (I.6), introduite par Duvaut et Lions [10] et Moreau [22].

Proposition I.1

$$\left\| \begin{array}{l} \text{La formulation classique (I.6) est équivalente à l'inégalité variationnelle} \\ \text{suivante :} \end{array} \right. \quad \forall \underline{Y} \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \langle \underline{R}_T, \underline{Y} - \dot{\underline{U}}_T^+ \rangle - \mu R_N (\|\underline{Y}\| - \|\dot{\underline{U}}_T^+\|) \geq 0. \quad (\text{I.7})$$

Preuve :

Supposons (I.7) acquise. Choisisant successivement $\underline{Y} = 0$ et $\underline{Y} = 2\dot{\underline{U}}_T^+$ dans (I.7), il vient :

$$\begin{aligned} -\langle \underline{R}_T, \dot{\underline{U}}_T^+ \rangle + \mu R_N \|\dot{\underline{U}}_T^+\| &\geq 0, \\ \langle \underline{R}_T, \dot{\underline{U}}_T^+ \rangle - \mu R_N \|\dot{\underline{U}}_T^+\| &\geq 0, \end{aligned}$$

et donc :

$$\langle \underline{R}_T, \dot{\underline{U}}_T^+ \rangle - \mu R_N \|\dot{\underline{U}}_T^+\| = 0. \quad (\text{I.8})$$

(I.7) implique alors

$$\forall \underline{Y} \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \langle \underline{R}_T, \underline{Y} \rangle - \mu R_N \|\underline{Y}\| \geq 0. \quad (\text{I.9})$$

Choisisant $\underline{Y} \neq 0$ orthogonal à \underline{R}_T , on en déduit $R_N \leq 0$, puis, en utilisant (I.9) avec $\underline{Y} = -\underline{R}_T$:

$$\|\underline{R}_T\| \leq -\mu R_N. \quad (\text{I.10})$$

Il est alors clair que (I.8) et (I.10) impliquent la forme classique de la loi de Coulomb.

Réciproquement, on suppose que la formulation classique (I.6) de la loi de Coulomb est vérifiée. L'inégalité $\|\underline{R}_T\| \leq -\mu R_N$ entraîne

$$\forall \underline{Y} \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad -\langle \underline{R}_T, \underline{Y} \rangle \leq |\langle \underline{R}_T, \underline{Y} \rangle| \leq -\mu R_N \|\underline{Y}\|. \quad (\text{I.11})$$

D'autre part, la relation (I.8) est toujours satisfaite. Par conséquent, en sommant les relations (I.8) et (I.11) il vient

$$\forall \underline{Y} \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \langle \underline{R}_T, \underline{Y} - \dot{\underline{U}}_T^+ \rangle - \mu R_N (\|\underline{Y}\| - \|\dot{\underline{U}}_T^+\|) \geq 0. \quad (\text{I.12})$$

Ce qui achève la démonstration. □

I.2.3 Formulation en terme de sous différentiel

Une autre formulation de la loi de frottement de Coulomb est proposée en terme de sous-différentiel. Auparavant, on rappelle quelques résultats d'analyse convexe qui seront utiles pour établir l'équivalence entre la formulation classique et la formulation en terme de sous-différentiel.

I.2.3.1 Quelques rappels d'analyse convexe

Pour plus de détails, on peut par exemple consulter [28].

Soit J une fonctionnelle convexe, semi-continue-inférieurement de \mathbb{R}^n dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On note $\partial J(u)$ l'ensemble des sous-gradients de J en u :

$$r \in \partial J(u) \iff r \in \mathbb{R}^n, J(v) \geq J(u) \langle r, v - u \rangle, \forall v \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{I.13})$$

Un exemple de fonction convexe qui sera souvent utilisée est la fonction indicatrice d'un ensemble convexe fermé $K \subset \mathbb{R}^n$, notée \mathcal{I}_K et définie par :

$$\mathcal{I}_K(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in K, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le sous-différentiel de la fonction indicatrice de K est le cône convexe fermé :

$$\partial \mathcal{I}_K(u) = \{r \in \mathbb{R}^n, \forall v \in K, \langle r, v - u \rangle \leq 0\}. \quad (\text{I.14})$$

On appelle fonction conjuguée de J , la fonction J^* de \mathbb{R}^n dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par :

$$J^*(r) = \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \{\langle r, v \rangle - J(v)\}.$$

La fonction conjuguée de \mathcal{I}_K est donnée par :

$$\mathcal{I}_K^*(r) = \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \{\langle r, v \rangle - \mathcal{I}_K(v)\} = \sup_{v \in K} \langle r, v \rangle.$$

\mathcal{I}_K^* est aussi appelée fonction d'appui du convexe K .

Enfin rappelons quelques propriétés des fonctions conjuguées utiles pour la suite :

Propriétés I.1 *Soit J convexe, semi-continue inférieurement, alors :*

$$J^{**} = (J^*)^* = J$$

et les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $r \in \partial J(u)$
- (ii) $J(u) + J^*(r) = \langle r, u \rangle$
- (iii) $u \in \partial J^*(r).$

I.2.3.2 Ecriture équivalente en terme de sous différentiel

Proposition I.2

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Pour } \mathcal{R} \in \mathbb{R}^+, \text{ on pose } C(\mathcal{R}) = \{\underline{Y} \in \mathbb{R}^{n-1}, \|\underline{Y}\| \leq \mathcal{R}\}. \\ \text{La forme classique de la loi de Coulomb est équivalente à :} \\ \\ \text{elle-même équivalente à :} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \underline{R}_T \in \partial \mathcal{I}_{C(-\mu R_N)}^*(-\underline{\dot{U}}_T^+), \\ \\ -\underline{\dot{U}}_T^+ \in \partial \mathcal{I}_{C(-\mu R_N)}(\underline{R}_T). \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(I.15)} \\ \\ \text{(I.16)} \end{array}$$

Preuve :

$C(-\mu R_N)$ étant un convexe fermé de \mathbb{R}^{n-1} , sa fonction indicatrice $\mathcal{I}_{C(-\mu R_N)}$ est convexe semi-continue inférieurement. Il en est donc de même pour sa conjuguée $\mathcal{I}_{C(-\mu R_N)}^*$, fonction d'appui de $C(-\mu R_N)$, définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{C(-\mu R_N)}^*(\underline{X}) &= \sup_{\underline{Y} \in C(-\mu R_N)} (\langle \underline{X}, \underline{Y} \rangle), \\ &= -\mu R_N \|\underline{X}\|. \end{aligned}$$

Il est alors clair que (I.15) est équivalente à (I.7) par la définition même de l'ensemble des sous-gradients (définition (I.13)). L'équivalence entre (I.15) et (I.16) provient des propriétés I.1. \square

I.2.4 Autre formulation de la loi de Coulomb

Proposition I.3

$$\left\| \begin{array}{l} \text{L'écriture classique (I.6) de la loi de Coulomb est équivalente à :} \\ \\ (i) \underline{R} \in K_\mu, \\ \\ (ii) \forall \underline{X} \in K_\mu, R_N \langle \underline{X}_T, \underline{\dot{U}}_T^+ \rangle \leq X_N \langle \underline{R}_T, \underline{\dot{U}}_T^+ \rangle. \end{array} \right. \quad \text{(I.17)}$$

Preuve :

D'après la proposition I.2, il suffit de montrer que la relation (I.17) est équivalente à la condition (I.16).

Supposons que la relation (I.17) est satisfaite et montrons que cela implique la condition (I.16).

Tout d'abord, si $R_N = 0$, il n'y a rien à prouver.

On suppose donc $R_N < 0$. Soit $\underline{X}_T \in C(-\mu R_N)$. On a $\left(-1, -\frac{\underline{X}_T}{R_N}\right) \in K_\mu$. Donc, par hypothèse,

$$-1 \langle \underline{\dot{U}}_T^+, \underline{R}_T \rangle \geq R_N \langle \frac{-\underline{X}_T}{R_N}, \underline{\dot{U}}_T^+ \rangle,$$

soit

$$\langle \underline{\dot{U}}_T^+, \underline{X}_T - \underline{R}_T \rangle \geq 0, \quad \forall \underline{X}_T \in C(-\mu R_N),$$

qui n'est autre que (I.16).

Réciproquement, si la condition (I.16) est satisfaite, $\|\underline{R}_T\| \leq -\mu R_N$. On peut supposer $R_N < 0$.

Soit $\underline{X} \in K_\mu$ quelconque. On veut montrer que :

$$X_N \langle \underline{\dot{U}}_T^+, \underline{R}_T \rangle \geq R_N \langle \underline{X}_T, \underline{\dot{U}}_T^+ \rangle.$$

On peut supposer que $X_N < 0$ car sinon il n'y a rien à montrer. Alors,

$$\|R_N \frac{\underline{X}_T}{X_N}\| \leq -\mu R_N$$

et donc par hypothèse

$$\langle \underline{\dot{U}}_T^+, R_N \frac{\underline{X}_T}{X_N} - \underline{R}_T \rangle \geq 0$$

qui est la conclusion désirée. □

I.2.5 Formulation finale du problème d'évolution

On revient sur les équations (I.3) (I.4) (I.5) que l'on souhaite compléter par la loi de frottement de Coulomb lorsque la particule est en contact avec l'obstacle. On a vu dans la section I.1 que la réaction est en général une mesure sur $[0, \hat{T}]$ à valeur dans \mathbb{R}^n et non une fonction, et il apparaît difficile de donner un sens à la formulation classique (I.6) de la loi de Coulomb dans ce contexte. De fait, la formulation variationnelle est la plus adaptée lorsque la réaction est une mesure et la vitesse à droite une fonction à variation bornée. Ainsi, tenant compte du fait que toute fonction à variation bornée de $[0, \hat{T}]$ dans \mathbb{R}^n est réglée (limite uniforme de fonctions en escalier) et donc universellement intégrable (intégrable vis-à-vis de n'importe quelle mesure), on pourra, en suivant la formulation variationnelle (I.7), postuler la loi de Coulomb dans la circonstance où $\underline{U} \in MMA([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$ et $\underline{R} \in \mathcal{M}([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$, sous la forme :

$$\forall \underline{V} \in \mathcal{C}^0([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^{n-1}), \quad \int_{[0, \hat{T}]} \langle \underline{R}_T, \underline{V} - \underline{\dot{U}}_T^+ \rangle - \mu R_N (\|\underline{V}\| - \|\underline{\dot{U}}_T^+\|) \geq 0.$$

Complétant les équations gouvernant le mouvement du système (qui sera appelé dans toute la suite système de Klarbring) par des conditions initiales, le problème d'évolution à résoudre s'écrit :

\mathcal{P}_u : Trouver $\underline{U} \in MMA([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$ et $\underline{R} \in \mathcal{M}([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$ tels que :

$$\underline{U}(0) = \underline{U}_0, \quad \dot{\underline{U}}^+(0) = \underline{V}_0, \quad (\text{condition initiale})$$

$$m\ddot{\underline{U}} + \underline{K}\underline{U} = \underline{F} + \underline{R} \quad (\text{équation du mouvement})$$

$$U_N \leq 0, \quad R_N \leq 0, \quad U_N R_N = 0 \quad (\text{contact unilatéral})$$

$$\forall \underline{V} \in \mathcal{C}^0([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^{n-1}), \quad \int_{[0, \hat{T}]} \langle \underline{R}_T, \underline{V} - \dot{\underline{U}}_T^+ \rangle - \mu R_N (\|\underline{V}\| - \|\dot{\underline{U}}_T^+\|) \geq 0$$

(frottement de Coulomb)

$$U_N(t) = 0 \quad \implies \quad \dot{U}_N^+(t) = -e\dot{U}_N^-(t), \quad (\text{loi d'impact})$$

où la condition initiale est supposée compatible avec la liaison unilatérale :

$$U_{0N} \leq 0 \quad \text{et :} \quad U_{0N} = 0 \implies V_{0N} \leq 0.$$

Dans toute la suite, on se limitera à l'étude du cas particulier $e = 0$ (loi d'impact complètement inélastique).

Chapitre II

APPROXIMATION DES SOLUTIONS

RÉSUMÉ

Ce chapitre est consacré à l'approximation, et à l'obtention d'un résultat d'existence de solutions pour le problème \mathcal{P}_u dans le cas où $e = 0$. Le point essentiel de la preuve utilise un résultat de Monteiro-Marques légèrement adapté. On suppose non plus que les données sont bornées mais que la force extérieure est seulement intégrable ($\underline{F} \in L^1$). La loi d'impact est complètement inélastique. Après discrétisation en temps, on montre que l'algorithme "NSCD" permet de construire une suite d'approximation, dont on montre ensuite que l'on peut extraire une sous-suite convergente. Un résultat de Monteiro-Marques montre alors que cette sous-suite converge en fait vers une solution du problème \mathcal{P}_u .

II.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'approximation des solutions du problème \mathcal{P}_u , dans le cas où la force extérieure est seulement supposée intégrable ($\underline{F} \in L^1([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$) et la loi d'impact complètement inélastique ($e = 0$). Après discrétisation de l'intervalle $[0, \hat{T}]$, l'algorithme "NonSmooth Contact Dynamics", qui est une adaptation du schéma d'Euler implicite au problème considéré, fournit des valeurs numériques qui sont interpolées pour construire une approximation dans MMA d'une éventuelle solution au problème \mathcal{P}_u . Considérant une suite d'approximations ainsi construites sur des pas de temps de plus en plus petits, on montre ensuite qu'elle vérifie des estimations uniformes permettant l'utilisation d'un résultat de compacité pour extraire une sous-suite convergente. Il reste à montrer que la limite fournit une solution au problème \mathcal{P}_u , résultat montré en 1993 par Monteiro-Marques [21] et rappelé ici. On en déduit alors l'existence de solutions au problème \mathcal{P}_u sous la seule hypothèse que la force $\underline{F}(t)$ est intégrable sur $[0, \hat{T}]$ et la loi d'impact complètement inélastique.

II.2 Problème discrétisé

L'approximation de l'équation de la dynamique se fait par une méthode appelée par la suite θ -Euler Méthode reposant sur une adaptation d'un schéma Euler implicite.

L'intervalle d'étude $]0, \hat{T}]$ est subdivisé en sous-intervalles $]t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, K - 1$, de longueur h avec $t_0 = 0$ et $t_K = \hat{T}$. L'équation de la dynamique permet d'établir :

$$m [\underline{\dot{U}}^+(t_{i+1}) - \underline{\dot{U}}^+(t_i)] = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{F} ds + \int_{]t_i, t_{i+1}]} \underline{R} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{K} \underline{U} ds,$$

$$\underline{U}(t_{i+1}) = \underline{U}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{\dot{U}} ds.$$

On suppose que la dérivée à droite est continue. Ce qui permet d'établir :

$$m [\underline{\dot{U}}(t_{i+1}) - \underline{\dot{U}}(t_i)] = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{F} ds + \int_{]t_i, t_{i+1}]} \underline{R} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{K} \underline{U} ds, \quad (\text{II.1})$$

$$\underline{U}(t_{i+1}) = \underline{U}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{\dot{U}} ds.$$

Les intégrales constituant les relations (II.1) sont ensuite approximées.

Le terme dans lequel apparaît la réaction est approximé par la valeur moyenne de l'impulsion sur un pas de temps h et ne correspond en aucun cas à la réaction à l'instant t_{i+1} . Cette moyenne n'est pas élémentaire puisque l'intégration ne se fait pas par rapport à la mesure de Lebesgue. Cependant l'intervalle de temps étant petit, l'intégrale décrit en quelque sorte des forces instantanées. On note alors :

$$\underline{R}^{i+1} = \frac{1}{h} \int_{]t_i, t_{i+1}]} \underline{R}.$$

La méthode proposée par Moreau consiste à approximer la vitesse par une méthode de type Euler implicite et les autres intégrales par une θ méthode. Il vient :

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{\dot{U}} ds &= h \underline{V}^{i+1}, \\ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{F} ds &= h [\theta \underline{F}^{i+1} + (1 - \theta) \underline{F}^i], \\ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{K} \underline{U} ds &= h [\theta \underline{K} \underline{U}^{i+1} + (1 - \theta) \underline{K} \underline{U}^i], \end{aligned}$$

où l'exposant j désigne l'approximation à l'instant t_j et θ est un paramètre réel compris entre 0 et 1. Par la suite, on choisit une valeur $\theta = 0.5$ donnant de bons résultats d'approximation ([32])

La θ -Euler méthode permet finalement d'écrire les relations (II.1) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \underline{V}^{i+1} &= \underline{V}^i + \frac{h}{2m} (\underline{F}^{i+1} + \underline{F}^i) - \underline{K}(\underline{U}^{i+1} + \underline{U}^i) + \frac{h}{m} \underline{R}^{i+1}, \\ \underline{U}^{i+1} &= \underline{U}^i + h \underline{V}^{i+1}. \end{aligned} \tag{II.2}$$

Durant les phases de mouvement sans contact, la vitesse à l'instant t^{i+1} notée $(\underline{V}^{i+1})^{libre}$ s'exprime comme suit :

$$(\underline{V}^{i+1})^{libre} = \underline{V}^i + \frac{h}{2m} (\underline{F}^{i+1} + \underline{F}^i) - \underline{K}(\underline{U}^{i+1} + \underline{U}^i).$$

La loi de frottement de Coulomb pour le problème discrétisé s'écrit :

$$|R_T^{i+1}| \leq \mu |R_N^{i+1}|, \quad \begin{cases} \text{si } |R_T^{i+1}| < \mu |R_N^{i+1}|, & \text{alors } V_T^{i+1} = 0, \\ \text{si } |R_T^{i+1}| = \mu |R_N^{i+1}|, & \text{alors } \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } R_T^{i+1} = -\lambda V_T^{i+1}. \end{cases}$$

L'équation de la dynamique et la loi de frottement de Coulomb discrétisées sont formulées en terme de vitesse alors que les conditions de contact utilisent le déplacement. Afin de garder la vitesse comme seule inconnue, on introduit une loi de contact en vitesse. Ce qui est fait par la proposition II.1

La mesure \underline{R} est absolument continue par rapport à sa valeur absolue. Par le théorème de Lebesgue-Radon-Nykodym elle admet donc une densité par rapport à sa valeur absolue :

$$\underline{R} = r|\underline{R}| \quad \text{avec} \quad r \in L^1([0, \hat{T}], |\underline{R}|; \mathbb{R}^n) \tag{II.3}$$

et

$$|r(t)| = 1 \quad |\underline{R}| - p.p \ t \in [0, \hat{T}], \tag{II.4}$$

où l'on adopte la notation $|\underline{R}| - p.p \ t \in [0, \hat{T}]$ pour "pour presque tout t dans $[0, \hat{T}]$ par la mesure $|\underline{R}|$ ".

Proposition II.1

Soit $\underline{F} \in L^1([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$, $\underline{R} \in \mathcal{M}([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$ et $r \in L^1([0, \hat{T}], |\underline{R}|; \mathbb{R}^n)$ la densité de \underline{R} par rapport à $|\underline{R}|$.

On a l'équivalence :

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & m\ddot{\underline{U}} + \underline{K}\underline{U} = \underline{F} + \underline{R}, \\
 & U_N = 0 \implies \dot{U}_N^+ = 0, \\
 & U_N \leq 0, \quad R_N \leq 0, \quad U_N R_N = 0, \\
 (ii) \quad & m\ddot{\underline{U}} + \underline{K}\underline{U} = \underline{F} + \underline{R}, \\
 & U_N \leq 0 \text{ et } \begin{cases} U_N(t) < 0 \implies r_N(t) = 0 \\ U_N = 0 \implies \dot{U}_N^+(t) \leq 0, \quad r_N(t) \leq 0, \quad \dot{U}_N^+(t)r_N(t) = 0 \end{cases} \quad |\underline{R}| - p.p \ t \in [0, \hat{T}].
 \end{aligned} \tag{II.5}$$

$$\tag{II.6}$$

Preuve :

Supposons que \underline{U} vérifie la relation (II.5) et montrons qu'elle satisfait la relation (II.6).

La condition sur le déplacement normal est satisfaite. De plus d'après (II.5), on a $U_N R_N = 0$. Ce qui implique $U_N r_N(t) |\underline{R}| = 0$ et donc $U_N r_N(t) = 0 \ |\underline{R}| - p.p \ t \in [0, \hat{T}]$. Ainsi si $U_N(t) < 0$, $r(t) = 0$. Enfin, d'après la loi d'impact, si $U_N(t) = 0$ alors $\dot{U}_N^+(t) = 0$. Par conséquent d'une part $\dot{U}_N^+ \leq 0$ et d'autre part $r_N \dot{U}_N^+ = 0$.

Réciproquement, la condition portant sur le déplacement normal est satisfaite. Comme $R_N = r_N |\underline{R}|$, la condition sur la réaction normale est également satisfaite. La condition de complémentarité est vérifiée. En effet, on a $U_N R_N = U_N r_N |\underline{R}|$ et $U_N r_N = 0 \ |\underline{R}| - p.p \ t \in [0, \hat{T}]$. Soit t tel que $U_N(t) = 0$. On veut montrer que $\dot{U}_N^+ = 0$. Supposons donc que $\dot{U}_N^+ < 0$. La condition sur le déplacement normal et l'équation du mouvement montrent que la vitesse \dot{U}_N^+ est discontinue en t . Il existe donc un atome différent de zéro de l'accélération \ddot{U}_N^+ en t et par suite un atome différent de zéro de la mesure R_N . Ainsi, $|\underline{R}|(\{t\}) \neq 0$ et $r_N(t) < 0$. Ce qui contredit $r_N \dot{U}_N^+ = 0 \ |\underline{R}| - p.p \ t \in [0, \hat{T}]$. Et donc, on a nécessairement $\dot{U}_N^+ = 0$ et la preuve est achevée. \square

La proposition II.1 permet d'obtenir une loi de contact en vitesse pour le problème discrétisé à l'instant t_{i+1} :

$$\begin{aligned}
 \text{Si } U_N^{i+1} \geq 0 & \implies V_N^{i+1} \leq 0, \quad R_N^{i+1} \leq 0, \quad V_N^{i+1} R_N^{i+1} = 0, \\
 \text{Si } U_N^{i+1} < 0 & \implies R_N^{i+1} = 0.
 \end{aligned} \tag{II.7}$$

On observe que cette forme discrétisée autorise une interpénétration ce qui n'est pas le cas du problème continu (II.6). L'algorithme et l'équivalence avec (II.5) font que cette interpénétration est faible.

II.3 Principe de la méthode “NSCD”

La méthode “NonSmooth-Contact-Dynamics” développée par J.J. Moreau et M. Jean [13] permet de résoudre des problèmes dynamiques en présence de contraintes unilatérales sans restriction particulière. Pour la clarté du propos, nous présentons cette méthode dans le cas d’un problème de dimension deux.

Tout d’abord, on commence par exprimer l’équation du mouvement du système

$$\begin{cases} \underline{V}^{i+1} = \underline{V}^i + \frac{h}{m} ((\theta \underline{F}^{i+1} + (1 - \theta) \underline{F}^i) - (\theta \underline{K} \underline{U}^{i+1} + (1 - \theta) \underline{K} \underline{U}^i)) + h \underline{R}^{i+1}, \\ \underline{U}^{i+1} = \underline{U}^i + h \underline{V}^{i+1}, \end{cases}$$

sous une forme équivalente

$$\underline{\tilde{M}} \underline{V}^{i+1} = \underline{\tilde{F}}^{i+1} + h \underline{R}^{i+1},$$

avec

$$\begin{cases} \underline{\tilde{M}} = m \underline{I} + h^2 \theta \underline{K}, \\ \underline{\tilde{F}}^{i+1} = m \underline{V}^i - h \underline{K} \underline{U}^i + h [\theta \underline{F}^{i+1} + (1 - \theta) \underline{F}^i], \end{cases}$$

h est le pas de temps, θ est le paramètre de la θ -Euler méthode : $\theta \in [0, 1]$. On rappelle que $\theta = 0$ correspond à une méthode explicite et $\theta = 1$ une méthode implicite.

Cette dernière relation s’écrit comme une équation linéaire donnant la vitesse comme une fonction affine de l’impulsion :

$$\underline{V}^{i+1} = (\underline{V}^{i+1})^{libre} + \underline{L} \underline{R}^{i+1},$$

avec

$$\begin{cases} (\underline{V}^{i+1})^{libre} = \underline{\tilde{M}}^{-1} \underline{\tilde{F}}^{i+1}, \\ \underline{L} = h \underline{\tilde{M}}^{-1} = \begin{pmatrix} L_{NN} & L_{NT} \\ L_{TN} & L_{TT} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Afin de déterminer la solution de ce problème, on commence par estimer la distance de contact \tilde{U}_N^{i+1} . Pour cela, on considère l’équation du mouvement dans le cas où les réactions sont nulles. La quantité $(\underline{V}^{i+1})^{libre}$ représente alors la vitesse de la particule libre et l’estimation de cette distance de contact est donnée par la relation :

$$\tilde{U}_N^{i+1} = U_N^i + h (\theta (V_N^{i+1})^{libre} + (1 - \theta) V_N^i). \quad (\text{II.8})$$

Si cette quantité est négative, cela signifie que la masse est en vol libre. Ainsi à l'itéré $i + 1$, la solution $(\underline{V}^{i+1}, \underline{R}^{i+1})$ est déterminée par les relations ci-dessous :

$$\begin{cases} V_N^{i+1} = (V_N^{i+1})^{libre}, \\ V_T^{i+1} = (V_T^{i+1})^{libre}, \\ R_N^{i+1} = 0, \\ R_T^{i+1} = 0. \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Si la quantité (II.8) est positive ou nulle, la masse est supposée en contact. Quatre situations sont alors envisageables :

- i. la masse décolle,
- ii. la masse glisse dans le sens positif,
- iii. la masse glisse dans le sens négatif,
- iv. la masse est bloquée.

Supposons que la valeur de $(V_N^{i+1})^{libre}$ soit négative. La masse décolle et la solution $(\underline{V}^{i+1}, \underline{R}^{i+1})$ est alors déterminée par :

$$\begin{cases} V_N^{i+1} = (V_N^{i+1})^{libre}, \\ V_T^{i+1} = (V_T^{i+1})^{libre}, \\ R_N^{i+1} = 0, \\ R_T^{i+1} = 0. \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

On suppose que la masse reste en contact. On est alors dans une des situations ii.-iv. Afin d'obtenir la solution $(\underline{V}^{i+1}, \underline{R}^{i+1})$ du problème, on exprime la réaction tangentielle en fonction de la vitesse tangentielle par le biais des équations du mouvement. Il vient :

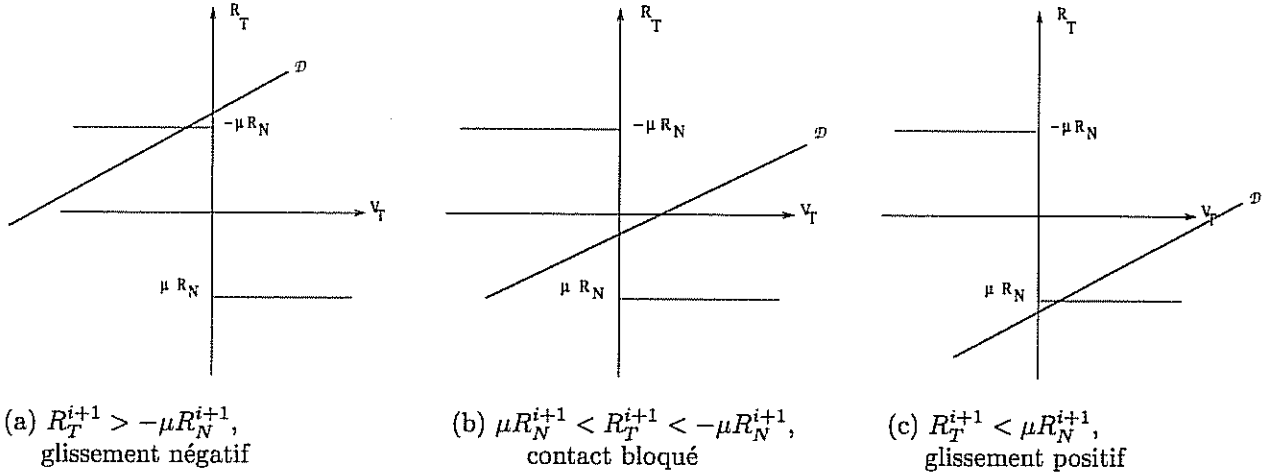
$$R_T^{i+1} = \frac{\tilde{M}_{2,2} V_T^{i+1} - \tilde{F}_T^{i+1}}{h}. \quad (\text{II.11})$$

Dans le plan $\{V_T^{i+1}, R_T^{i+1}\}$, on désigne par (\mathcal{D}) le graphe de cette relation.

La distinction des différents statuts de contact (contact bloqué, glissement négatif ou positif), revient à considérer trois possibilités d'intersection de la droite (\mathcal{D}) avec le graphe de Coulomb (figure (II.1)). On en déduit alors la solution $(\underline{V}^{i+1}, \underline{R}^{i+1})$ du problème à l'itéré $i + 1$.

• Tout d'abord, on cherche l'intersection de la droite \mathcal{D} avec le graphe de la loi de Coulomb pour $R_T^{i+1} \geq -\mu R_N^{i+1}$. Dans ce cas, on a $V_T^{i+1} \leq 0$, ce qui signifie que la masse glisse dans le sens négatif. La condition (II.11) portant sur la réaction se traduit par une relation entre les composantes de $\underline{\tilde{F}}^{i+1}$ qui s'exprime :

$$\tilde{F}_T^{i+1} + \mu \tilde{F}_N^{i+1} \leq 0. \quad (\text{II.12})$$


 FIG. II.1 – Intersection du graphe de la loi de Coulomb avec la droite \mathcal{D}

Par conséquent si la masse est en glissement négatif, la solution $(\underline{V}^{i+1}, \underline{R}^{i+1})$ est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_N^{i+1} = 0, \\ V_T^{i+1} = \frac{\tilde{F}_T^{i+1} + \mu \tilde{F}_N^{i+1}}{M_{2,2} + \mu M_{1,2}}, \\ R_N^{i+1} = \frac{\tilde{M}_{1,2} V_T^{i+1} - \tilde{F}_N^{i+1}}{h}, \\ R_T^{i+1} = -\mu R_N^{i+1}. \end{array} \right. \quad (\text{II.13})$$

• On s'intéresse ensuite à l'intersection de la droite \mathcal{D} avec le graphe de Coulomb dans le cas où $R_T^{i+1} \leq \mu R_N^{i+1}$. La vitesse tangentielle est positive ce qui veut dire que la masse glisse dans le sens positif.

La relation (II.11) portant sur la réaction est traduite en fonction des composantes de $\underline{\tilde{F}}^{i+1}$ et s'écrit

$$\tilde{F}_T^{i+1} - \mu \tilde{F}_N^{i+1} \geq 0. \quad (\text{II.14})$$

On détermine alors la solution $(\underline{V}^{i+1}, \underline{R}^{i+1})$ du problème pour un glissement positif :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_N^{i+1} = 0, \\ V_T^{i+1} = \frac{\tilde{F}_T^{i+1} - \mu \tilde{F}_N^{i+1}}{M_{2,2} - \mu M_{1,2}}, \\ R_N^{i+1} = \frac{\tilde{M}_{1,2} V_T^{i+1} - \tilde{F}_N^{i+1}}{h}, \\ R_T^{i+1} = \mu R_N^{i+1}. \end{array} \right. \quad (\text{II.15})$$

• Enfin, si aucune des relations (II.12) et (II.14) n'est satisfaite, la situation correspond à une

masse en contact bloquée. La solution $(\underline{V}^{i+1}, \underline{R}^{i+1})$ est donnée par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_N^{i+1} = 0, \\ V_T^{i+1} = 0, \\ R_N^{i+1} = -\frac{\tilde{F}_T^{i+1}}{h}, \\ R_T^{i+1} = -\frac{\tilde{F}_T^{i+1}}{h}. \end{array} \right. \quad (\text{II.16})$$

Finalement, on déduit le déplacement par la relation

$$\underline{U}^{i+1} = \underline{U}^i + h\underline{V}^{i+1}.$$

II.4 Algorithme de résolution

L'algorithme de résolution est décrit dans le tableau II.1, ce qui donne un sens précis aux différentes boucles utilisées dans certaines preuves du chapitre IV.

Boucle sur le temps (i+1) :

Estimation de la distance de contact \tilde{U}_N^{i+1}

si $\tilde{U}_N^{i+1} < 0$,

la masse est en vol libre,

la solution $(\underline{V}^{i+1}, \underline{R}^{i+1})$ est donnée par les relations (II.9),

sinon

si $(V_N^{i+1})^{libre} < 0$,

la masse décolle,

la solution $(\underline{V}^{i+1}, \underline{R}^{i+1})$ est donnée par les relations (II.10),

sinon

si $\tilde{F}_T^{i+1} - \mu \tilde{F}_N^{i+1} \geq 0$,

la masse est en glissement positif,

la solution $(\underline{V}^{i+1}, \underline{R}^{i+1})$ est donnée par les relations (II.13),

sinon

si $\tilde{F}_T^{i+1} + \mu \tilde{F}_N^{i+1} \leq 0$,

la masse est en glissement négatif,

la solution $(\underline{V}^{i+1}, \underline{R}^{i+1})$ est donnée par les relations (II.15),

sinon la masse est en contact bloquée,

la solution $(\underline{V}^{i+1}, \underline{R}^{i+1})$ est donnée par les relations (II.16),

fin si

fin si

fin si

fin si

actualisation du déplacement

$$\underline{U}^{i+1} = \underline{U}^i + h \underline{V}^{i+1}.$$

Fin de calcul

TAB. II.1 – *Algorithme de résolution.*

II.5 Construction des suites d'approximation

Soit K un entier strictement positif. On pose :

$$h = \frac{\hat{T}}{K}.$$

On définit ensuite une approximation de \underline{F} par une fonction en escalier \underline{F}_K :

$$\underline{F}_K(t) = \underline{F}_K^i, \quad \forall t \in [ih, (i+1)h[$$

où les réels \underline{F}_K^i ($i \in \{0, 1, \dots, K-1\}$) sont définis de sorte que $\|\underline{F} - \underline{F}_K\|_{L^1}$ tend vers 0 lorsque K tend vers l'infini.

L'algorithme décrit au paragraphe précédent fournit une suite de valeurs approchées \underline{U}_K^i ($i \in \{0, 1, \dots, K-1\}$) du déplacement \underline{U} aux instants ih . On définit la solution approchée $\underline{U}_K \in MMA([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$ par interpolation linéaire de ces valeurs :

$$\underline{U}_K(t) = \left(\frac{\underline{U}_K^{i+1} - \underline{U}_K^i}{h} \right) (t - ih) + \underline{U}_K^i, \quad t \in [ih, (i+1)h[.$$

La vitesse $\dot{\underline{U}}_K^+$ est alors la fonction en escalier définie par :

$$\dot{\underline{U}}_K^+(t) = \frac{\underline{U}_K^{i+1} - \underline{U}_K^i}{h} = \underline{V}_K^i, \quad t \in [ih, (i+1)h[$$

et l'accélération se réduit à une somme finie de mesures de Dirac :

$$\ddot{\underline{U}}_K = \sum_{i=1}^{K-1} [\dot{\underline{U}}_K^+(ih) - \dot{\underline{U}}_K^-(ih)] \delta_{ih} = \sum_{i=1}^{K-1} [\underline{V}_K^i - \underline{V}_K^{i-1}] \delta_{ih}.$$

II.6 Obtention d'estimations uniformes sur la suite d'approximation

II.6.1 Estimation sur la vitesse approchée

On commence tout d'abord par établir une inégalité de dissipation pour un pas de temps permettant ensuite de montrer que la vitesse est globalement bornée sur $[0, \hat{T}]$.

Lemme II.1

$$\left\| \begin{array}{l} \forall K \geq 1, \text{ pour } j = 0, \dots, K-1 \text{ on a :} \\ m \|\underline{V}_K^{j+1}\|^2 - m \|\underline{V}_K^j\|^2 + \langle \underline{K} \underline{U}_K^{j+1}, \underline{U}_K^{j+1} \rangle - \langle \underline{K} \underline{U}_K^j, \underline{U}_K^j \rangle \leq h \langle \underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j, \underline{V}_K^{j+1} \rangle. \end{array} \right. \quad (\text{II.17})$$

Preuve :

On part de l'équation discrétisée de la dynamique (II.2) que l'on compose par la quantité \underline{V}_K^{j+1} . Il vient :

$$\begin{aligned} \langle \underline{V}_K^{j+1}, m(\underline{V}_K^{j+1} - \underline{V}_K^j) \rangle &= \langle \underline{V}_K^{j+1}, h\underline{R}_K^{j+1} - \frac{h}{2}\underline{K}(\underline{U}_K^{j+1} + \underline{U}_K^j) + \frac{h}{2}\underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j \rangle, \\ &= h\langle \underline{V}_K^{j+1}, \underline{R}_K^{j+1} \rangle + \frac{h}{2}\langle \underline{V}_K^{j+1}, \underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j - \underline{K}(\underline{U}_K^{j+1} + \underline{U}_K^j) \rangle, \\ &\leq \frac{h}{2}\langle \underline{V}_K^{j+1}, \underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j - \underline{K}(\underline{U}_K^{j+1} + \underline{U}_K^j) \rangle. \end{aligned}$$

En effet, quel que soit le statut de la particule à l'instant $(j+1)h$, la quantité $\langle \underline{V}_K^{j+1}, \underline{R}_K^{j+1} \rangle$ est négative. Examinons les différents cas :

- si la masse est en mouvement sans contact :

$$\underline{R}_K^{j+1} = 0 \text{ d'où } \langle \underline{V}_K^{j+1}, \underline{R}_K^{j+1} \rangle = 0;$$

- si la masse est en contact affleurant :

$$\underline{R}_K^{j+1} = 0 \text{ d'où } \langle \underline{V}_K^{j+1}, \underline{R}_K^{j+1} \rangle = 0;$$

- si la masse est en contact bloqué :

$$\underline{V}_K^{j+1} = 0 \text{ d'où } \langle \underline{V}_K^{j+1}, \underline{R}_K^{j+1} \rangle = 0;$$

- si la masse est en glissement :

$$\underline{V}_{KN}^{j+1} = 0 \text{ et } \underline{V}_{KT}^{j+1} = -\lambda \underline{R}_{KT}^{j+1} \text{ d'où } \langle \underline{V}_K^{j+1}, \underline{R}_K^{j+1} \rangle = -\lambda \langle \underline{R}_{KT}^{j+1}, \underline{R}_{KT}^{j+1} \rangle < 0.$$

Par conséquent, quel que soit le statut de la particule à l'instant $(j+1)h$, $\langle \underline{V}_K^{j+1}, \underline{R}_K^{j+1} \rangle \leq 0$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \frac{h}{2}\langle \underline{V}_K^{j+1}, \underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j - \underline{K}(\underline{U}_K^{j+1} + \underline{U}_K^j) \rangle &= \frac{1}{2}\langle \underline{U}_K^{j+1} - \underline{U}_K^j, \underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j - \underline{K}(\underline{U}_K^{j+1} + \underline{U}_K^j) \rangle, \\ &= \frac{1}{2}\left\{ \langle \underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j, \underline{U}_K^{j+1} - \underline{U}_K^j \rangle - \langle \underline{K}\underline{U}_K^{j+1}, \underline{U}_K^{j+1} \rangle + \langle \underline{K}\underline{U}_K^{j+1}, \underline{U}_K^j \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle \underline{K}\underline{U}_K^j, \underline{U}_K^{j+1} \rangle + \langle \underline{K}\underline{U}_K^j, \underline{U}_K^j \rangle \right\}, \\ &= \frac{1}{2}\left\{ \langle \underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j, \underline{U}_K^{j+1} - \underline{U}_K^j \rangle - \langle \underline{K}\underline{U}_K^{j+1}, \underline{U}_K^{j+1} \rangle + \langle \underline{K}\underline{U}_K^j, \underline{U}_K^j \rangle \right\}, \\ &= \frac{h}{2}\langle \underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j, \underline{V}_K^{j+1} \rangle - \frac{1}{2}\left\{ \langle \underline{K}\underline{U}_K^{j+1}, \underline{U}_K^{j+1} \rangle - \langle \underline{K}\underline{U}_K^j, \underline{U}_K^j \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Il en résulte l'inégalité :

$$\langle \underline{V}_K^{j+1}, m(\underline{V}_K^{j+1} - \underline{V}_K^j) \rangle \leq \frac{h}{2}\langle \underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j, \underline{V}_K^{j+1} \rangle - \frac{1}{2}\left\{ \langle \underline{K}\underline{U}_K^{j+1}, \underline{U}_K^{j+1} \rangle - \langle \underline{K}\underline{U}_K^j, \underline{U}_K^j \rangle \right\}. \quad (\text{II.18})$$

Or, pour tout $j = 0, \dots, K-1$, on a :

$$\begin{aligned}
 \langle m(\underline{V}_K^{j+1} - \underline{V}_K^j), \underline{V}_K^{j+1} \rangle &= \frac{1}{2} \langle (\underline{V}_K^{j+1} + \underline{V}_K^j) + (\underline{V}_K^{j+1} - \underline{V}_K^j), m(\underline{V}_K^{j+1} - \underline{V}_K^j) \rangle, \\
 &= \frac{1}{2} \langle (\underline{V}_K^{j+1} + \underline{V}_K^j), m(\underline{V}_K^{j+1} - \underline{V}_K^j) \rangle + \frac{1}{2} \langle (\underline{V}_K^{j+1} - \underline{V}_K^j), m(\underline{V}_K^{j+1} - \underline{V}_K^j) \rangle, \\
 &= \frac{1}{2} \langle m\underline{V}_K^{j+1}, \underline{V}_K^{j+1} \rangle - \frac{1}{2} \langle m\underline{V}_K^j, \underline{V}_K^j \rangle + \frac{1}{2} \langle (\underline{V}_K^{j+1} - \underline{V}_K^j), m(\underline{V}_K^{j+1} - \underline{V}_K^j) \rangle, \\
 &\geq \frac{1}{2} \langle m\underline{V}_K^{j+1}, \underline{V}_K^{j+1} \rangle - \frac{1}{2} \langle m\underline{V}_K^j, \underline{V}_K^j \rangle, \\
 &\geq \frac{m}{2} \|\underline{V}_K^{j+1}\|^2 - \frac{m}{2} \|\underline{V}_K^j\|^2.
 \end{aligned} \tag{II.19}$$

Finalement, en rassemblant les points (II.18), (II.19), on obtient l'inégalité (II.17) annoncée. \square

Lemme II.2

Soit $(\dot{\underline{U}}_K^+)_{K \geq 1}$ la suite d'approximation en vitesse. Alors :

$$\exists M > 0, \forall t \in [0, \hat{T}], \quad \|\dot{\underline{U}}_K^+(t)\| < M$$

où M est une constante réelle qui ne dépend pas de K .

Preuve :

Il s'agit donc de montrer que :

$$\forall K, \forall i \in \{0, 1, \dots, K-1\}, \quad \|\underline{V}_K^i\| < M.$$

L'inégalité de dissipation (II.17) obtenue au lemme précédent permet d'établir pour tout $j = 0, \dots, K-1$:

$$(\beta_K^{j+1})^2 - (\beta_K^j)^2 \leq h \|\underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j\| \|\underline{V}_K^{j+1}\|,$$

où on définit la quantité β_K^j par :

$$\beta_K^j = \sqrt{m \|\underline{V}_K^j\|^2 + \langle \underline{K} \underline{U}_K^j, \underline{U}_K^j \rangle},$$

satisfaisant

$$\beta_K^j \geq \sqrt{m} \|\underline{V}_K^j\|. \tag{II.20}$$

Il en résulte :

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, K-1\}, \quad (\beta_K^{j+1})^2 - (\beta_K^j)^2 - \frac{h}{\sqrt{m}} \|\underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j\| \beta_K^{j+1} \leq 0. \tag{II.21}$$

On considère ensuite l'inégalité (II.21) admettant β_K^{j+1} pour inconnue et on détermine les valeurs β_K^{j+1} pour lesquelles cette relation est satisfaite.

Le discriminant du premier membre est

$$\Delta = (\beta_K^j)^2 + \frac{h^2}{4m} \|\underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j\|^2 \geq 0,$$

et les zéros du premier membre sont

$$(\beta_K^{j+1})^\pm = \frac{h}{2\sqrt{m}} \|\underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j\| \pm \sqrt{(\beta_K^j)^2 + \frac{h^2}{4m} \|\underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j\|^2},$$

Ce qui nous permet d'établir,

$$\begin{aligned} \beta_K^{j+1} - \beta_K^j &\leq (\beta_K^{j+1})^+ - \beta_K^j = \frac{h}{2\sqrt{m}} \|\underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j\| + \sqrt{(\beta_K^j)^2 + \frac{h^2}{4m} \|\underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j\|^2} - \beta_K^j \\ &\leq \frac{h}{2\sqrt{m}} \|\underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j\| + \beta_K^j + \frac{h}{2\sqrt{m}} \|\underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j\| - \beta_K^j, \\ &\leq \frac{h}{\sqrt{m}} \|\underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j\|. \end{aligned} \tag{II.2}$$

Finalement, on somme de $j = 0$ à i l'inégalité (II.22) et il vient :

$$\begin{aligned} \beta_K^{i+1} &\leq \beta_K^0 + \frac{h}{\sqrt{m}} \sum_{j=0}^i \|\underline{F}_K^{j+1} + \underline{F}_K^j\|, \\ &\leq \beta_K^0 + \frac{2}{\sqrt{m}} \|\underline{F}_K\|_{L^1([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

qui donne le résultat annoncé. □

II.6.2 Estimation sur la variation de la vitesse approchée

On rappelle que la variation $\text{Var}(f; [a, b])$ est définie comme

$$\left\{ \sup \sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| \text{ pour toute partition finie } a = t_0, \dots, t_n = b \right\}.$$

L'objectif de ce paragraphe est d'établir le lemme suivant :

Lemme II.3

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } (\underline{\dot{U}}_K^+)_{K \geq 1} \text{ la suite d'approximation des vitesses.} \\ \text{Alors } \text{Var}(\underline{\dot{U}}_K^+; [0, \hat{T}]) < M', \text{ où } M' \text{ est une constante réelle positive qui ne dépend pas} \\ \text{de } K. \end{array} \right.$$

Preuve :

Afin de montrer que la variation de la suite d'approximation en vitesse est bornée indépendamment

de K , il suffit de montrer qu'il existe deux constantes C_N et C_T réelles positives ne dépendant pas de K telles que :

$$\sum_{i=0}^{K-1} |V_{KN}^{i+1} - V_{KN}^i| < C_N, \quad (II.23)$$

et

$$\sum_{i=0}^{K-1} \|\underline{V}_{KT}^{i+1} - \underline{V}_{KT}^i\| < C_T. \quad (II.24)$$

Dès lors le résultat souhaité sera acquis.

L'obtention des relations (II.23) et (II.24) s'obtient par un raisonnement similaire. Par conséquent, on ne présente les détails de la preuve que pour la relation (II.23).

On considère la composante normale de l'équation de la dynamique discrétisée. On a :

$$m(V_{KN}^{i+1} - V_{KN}^i) = hR_{KN}^{i+1} + \frac{h}{2} \left\{ (F_{KN}^{i+1} + F_{KN}^i) - \underbrace{([K_N(U_{KN}^{i+1} + U_{KN}^i) + \underline{W}(\underline{U}_{KT}^{i+1} + \underline{U}_{KT}^i)])}_{G_N^i} \right\}. \quad (II.25)$$

Ainsi,

$$\forall i = 0, \dots, K-1, |V_{KN}^{i+1} - V_{KN}^i| < \frac{h}{m} |R_{KN}^{i+1}| + \frac{h}{2m} \left\{ |F_{KN}^{i+1} + F_{KN}^i| + |G_N^i| \right\}.$$

Lorsque la masse est en contact à l'instant $(i+1)h$, la réaction \underline{R}_K^{i+1} n'est pas nulle et la vitesse normale V_N^{i+1} est nulle. A l'instant précédent ih , la masse peut être soit décollée et alors $V_N^i > 0$, soit en contact et $V_N^i = 0$, mais dans tous les cas la situation la réaction normale est telle que :

$$|hR_{KN}^{i+1}| \leq \frac{h}{2} \left\{ |F_{KN}^{i+1} + F_{KN}^i| + |G_N^i| \right\},$$

où la quantité G_N^i a été définie par la partie correspondante du second membre de (II.25). Il en résulte :

$$\forall i = 0, \dots, K-1, |V_{KN}^{i+1} - V_{KN}^i| \leq \frac{h}{m} \left\{ |F_{KN}^{i+1} + F_{KN}^i| + |G_N^i| \right\}.$$

Ainsi,

$$\sum_{i=0}^{K-1} |V_{KN}^{i+1} - V_{KN}^i| \leq \frac{2}{m} \|\underline{F}_K\|_{L^1([0,T];\mathbb{R}^n)} + \frac{h}{m} \sum_{i=0}^{K-1} |G_N^i|.$$

Or :

$$\begin{aligned}
 \frac{h}{m} \sum_{i=0}^{K-1} |G_N^i| &= \frac{h}{m} \sum_{i=0}^{K-1} \left\{ |K_N| \left[2|U_{KN}(0)| + h \sum_{j=1}^{i+1} |V_{KN}^j| + h \sum_{j=1}^i |V_{KN}^j| \right] \right. \\
 &\quad \left. + \|\underline{W}\| \left[2\|\underline{U}_{KT}(0)\| + h \sum_{j=1}^{i+1} \|\underline{V}_{KT}^j\| + h \sum_{j=1}^i \|\underline{V}_{KT}^j\| \right] \right\}, \\
 &\leq \frac{h}{m} \sum_{i=0}^{K-1} \{ |K_N| [2|U_{KN}(0)| + h(i+1)M + hiM] \\
 &\quad + \|\underline{W}\| [2\|\underline{U}_{KT}(0)\| + h(i+1)M + hiM] \}, \\
 &\leq \frac{2h}{m} \sum_{i=0}^{K-1} \left\{ (|K_N| |U_{KN}(0)| + \|\underline{W}\| \|\underline{U}_{KT}(0)\| + \hat{T}M(|K_N| + \|\underline{W}\|)) \right\}, \\
 &\leq \frac{2}{m} \left\{ (|K_N| |U_{KN}(0)| + \|\underline{W}\| \|\underline{U}_{KT}(0)\|) + (|K_N| + \|\underline{W}\|)M\hat{T} \right\} \hat{T}, \\
 &\leq \underbrace{\frac{2}{m} \left\{ (|K_N| |U_{0N}| + \|\underline{W}\| \|\underline{U}_{0T}\|) + (|K_N| + \|\underline{W}\|)M\hat{T} \right\}}_{C_N} \hat{T}.
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{K-1} |V_{KN}^{i+1} - V_{KN}^i| \leq \frac{2}{m} \|\underline{F}_K\|_{L^1([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)} + C_N.$$

Un raisonnement similaire permet d'établir :

$$\sum_{i=0}^{K-1} \|\underline{V}_{KT}^{i+1} - \underline{V}_{KT}^i\| \leq \frac{2}{m} \|\underline{F}_K\|_{L^1([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)} + C_T,$$

avec

$$C_T = \frac{2}{m} \left\{ (\|\underline{W}\| |U_{0N}| + \|\underline{K}_T\| \|\underline{U}_{0T}\|) + (\|\underline{K}_T\| + \|\underline{W}\|)M\hat{T} \right\} \hat{T}.$$

Ce qui prouve que la variation de la vitesse approchée \underline{U}_K^+ est bornée sur $[0, \hat{T}]$ indépendamment de K . \square

II.7 Convergence de la suite d'approximation

II.7.1 Définition et convergence d'une sous-suite

On rappelle le résultat classique suivant :

Théorème II.1 d'Helly- Banach

Soit $(\underline{V}_K)_{K \geq 0}$ une suite dans $BV([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$ telles que :

$$\exists M > 0 \forall t \in [0, \hat{T}], \forall K \in \mathbb{N}, \|\underline{V}_K(t)\| \leq M,$$

$$\exists M' > 0, \forall K \in \mathbb{N}, \text{Var}(\underline{V}_K; [0, \hat{T}]) \leq M'.$$

Alors il existe une suite extraite $(\underline{V}_{K_k})_{k \geq 0}$ et $\underline{V} \in BV([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\forall t \in [0, \hat{T}], \lim_{k \rightarrow +\infty} \underline{V}_{K_k}(t) = \underline{V}(t),$$

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^0([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n), \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{[0, \hat{T}]} \phi \dot{\underline{V}}_{K_k} = \int_{[0, \hat{T}]} \phi \dot{\underline{V}}.$$

En vertu, de ce qui précède, nous sommes en mesure d'établir la proposition suivante :

Proposition II.2

Soit $(\underline{U}_K)_{K \geq 1}$ la suite d'approximation définie au paragraphe II.5.

Alors il existe une sous-suite $(\underline{U}_{K_k})_{k \geq 0}$ telle que :

(i) $\underline{U}_{K_k} \rightarrow \underline{U}$, uniformément sur $[0, \hat{T}]$,

(ii) $\dot{\underline{U}}_{K_k}^+ \rightarrow \dot{\underline{U}}^+$, pour tout $t \in [0, \hat{T}]$ privé d'un ensemble dénombrable,

(iii) $\ddot{\underline{U}}_{K_k} \xrightarrow{*} \ddot{\underline{U}}$ dans $\mathcal{M}([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$.

Preuve :

Les estimations obtenues à la section II.6 permettent d'appliquer le théorème d'Helly-Banach à la suite $\dot{\underline{U}}_K^+$ pour en déduire l'existence de $\underline{V} \in BV([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\forall t \in [0, \hat{T}], \lim_{k \rightarrow +\infty} \dot{\underline{U}}_{K_k}^+(t) = \underline{V}(t),$$

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^0([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n), \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{[0, \hat{T}]} \phi \ddot{\underline{U}}_{K_k}^+ = \int_{[0, \hat{T}]} \phi \dot{\underline{V}}.$$

Posant :

$$\underline{U}(t) = \underline{U}_0 + \int_0^t \underline{V}(s) ds$$

il résulte du théorème de la convergence dominée de Lebesgue que

$$\underline{U}_{K_k} \longrightarrow \underline{U} \text{ uniformément sur } [0, \hat{T}].$$

D'autre part :

$$\forall t \in]0, \hat{T}[, \dot{\underline{U}}^+(t) = \underline{V}(t+).$$

par l'inégalité des accroissement finis. Comme $\underline{V}(t)$ et $\underline{V}(t+)$ coïncident sur $[0, \hat{T}]$ excepté peut-être en les points d'un sous-ensemble dénombrable de $[0, \hat{T}]$, on en déduit le théorème.

□

II.7.2 Propriétés de la limite

Pour finir, il faut montrer que la limite \underline{U} de la sous-suite construite par le biais de la θ -Euler méthode fournit une solution du problème \mathcal{P}_u . Ce résultat s'obtient en reproduisant exactement la démonstration de Monteiro-Marques [21](p 95-111). Par conséquent, elle ne sera pas détaillée ici.

Il existe donc une suite extraite de la suite des approximations fournie par "NSCD" qui converge, au sens décrit dans la proposition II.2 vers une solution du problème \mathcal{P}_u . Ce résultat montre l'existence d'une solution au problème \mathcal{P}_u lorsque \underline{F} est une fonction intégrable et $e = 0$.

Chapitre III

RÉSULTATS D'UNICITÉ

RÉSUMÉ

A l'issue du chapitre II, on sait que le problème \mathcal{P}_u possède une solution dès que la force extérieure est dans L^1 dans le cas $e = 0$. Le présent chapitre est maintenant consacré à la question de l'unicité. Dans une première partie, on montre que l'on n'a pas unicité en général, même avec une force extérieure, fonction de classe C^∞ du temps. Cela est prouvé par un contre-exemple que l'on reprend de Schatzman qui l'avait formulé pour le cas 1D sans frottement avec $e = 1$, qui avait été adapté pour le cas $e = 0$ par Ballard, et que l'on modifie pour l'adapter finalement au cas 2D avec frottement et $e = 0$. La deuxième partie montre qu'en revanche, il y a unicité si la force extérieure est supposée être une fonction analytique (ou analytique par morceau) du temps. Cette partie reprend un article à paraître dans la revue M2AN.

III.1 Introduction

En 1978, Schatzman [26] a obtenu un résultat d'existence de solution pour la dynamique des systèmes discrets avec contrainte unilatérale (sans frottement). Elle exhibe également un contre-exemple montrant que, même si les données sont toutes supposées de classe C^∞ , on ne peut prétendre en général, à l'unicité de la solution. En 1985, Percivale [25] remarque que, dans le cas du problème à un degré de liberté avec force extérieure ne dépendant que du temps, et ce de manière *analytique*, l'unicité de la solution est acquise. Ce résultat est d'abord étendu par Schatzman [27] au cas où la force extérieure est une fonction analytique du temps, mais aussi de la position et de la vitesse courantes, toujours pour le problème à un seul degré de liberté. Enfin, Ballard [1] étend le résultat au cas d'un nombre arbitraire de degrés de liberté et de contraintes unilatérales (toujours sans frottement). En nous inspirant du contre-exemple de Schatzman, on construit un contre-exemple pour le système de Klarbring démontrant que l'unicité n'est pas vraie en général, même pour une force extérieure ayant une régularité C^∞ . On adapte la technique de [1] au cas du frottement de Coulomb et l'on prouve, que l'unicité est retrouvée si la force extérieure est une fonction analytique du temps.

III.2 Contre-exemple à l'unicité pour le problème à un degré de liberté

III.2.1 Le problème à un degré de liberté

Par le problème à un degré de liberté, on entend le problème d'évolution associé à la dynamique d'une particule ponctuelle, de masse unité, astreinte à évoluer le long d'une demi-droite (obstacle en l'origine).

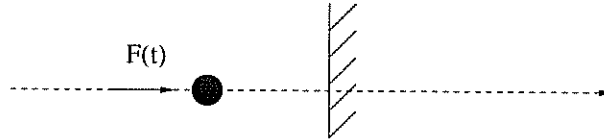


FIG. III.1 – Particule se déplaçant suivant une ligne.

En notant $F(t)$, la force extérieure (scalaire) s'exerçant sur la particule, et en supposant la particule au repos et en contact avec l'obstacle à l'instant initial, ce problème d'évolution s'écrit :

\mathcal{P}_1 : Trouver $U \in MMA([0, \hat{T}]; \mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}([0, \hat{T}]; \mathbb{R})$ tels que :

$$\begin{aligned} U(0) &= 0, \quad \dot{U}^+(0) = 0, \\ \ddot{U} &= F + R, \\ U &\leq 0, \quad R \leq 0 \quad UR = 0, \\ U(t) &= 0 \implies \dot{U}^+(t) = -e\dot{U}^-(t), \end{aligned}$$

où $e \in [0, 1]$ est le coefficient de restitution supposé connu. On rappelle que le cas $e = 1$ correspond à la loi d'impact élastique et que le cas $e = 0$ à celui de la loi d'impact complètement inélastique.

III.2.2 Cas de la loi d'impact élastique

Considérons le cas où la force extérieure F est supposée de classe C^∞ et positive (elle pousse constamment la particule vers l'obstacle). On vérifie alors que le problème \mathcal{P}_1 admet la solution triviale suivante :

$$U \equiv 0$$

$$R(t) = - \int_0^t \int_0^s F(\sigma) d\sigma ds$$

correspondant à l'absence de mouvement de la particule.

L'objectif de ce qui suit est la construction d'un cas particulier de fonction F positive et C^∞ , pour laquelle le problème \mathcal{P}_1 admet une autre solution que cette solution triviale. Cette construction est tirée de [26] et de [1].

Soit $\varrho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\varrho(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[, \\ e^{\frac{1}{t(t-1)}} \left(\int_0^1 e^{\frac{1}{t(t-1)}} dt \right)^{-1}, & \text{si } t \in]0, 1[. \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

- $\varrho \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$,
- $\text{supp } \varrho = [0, 1]$,
- $\int_0^1 \varrho(s) ds = 1, \quad \int_0^1 s \varrho(s) ds = \frac{1}{2}.$

L'intervalle de temps $[0, \hat{T}[$ est divisé en sous-intervalles $[a_{n+1}, a_n[$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissant strictement vers 0, qui sera précisée dans la suite. On pose alors $F(0) = 0$ et :

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in [a_{n+1}, a_{n+1} + d_n[, \\ \frac{F_n}{2} \varrho \left(\frac{t - a_{n+1} - d_n}{a_n - a_{n+1} - d_n} \right), & \text{si } t \in [a_{n+1} + d_n, a_n[. \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

La fonction $F(t)$ a l'allure suivante :

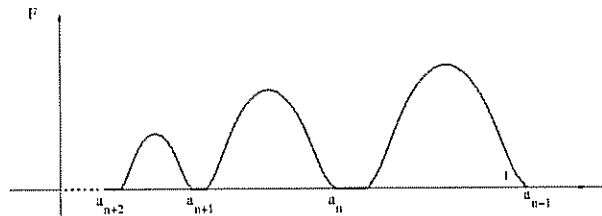


FIG. III.2 – Allure du chargement F pour une loi d'impact élastique

et est de classe C^∞ sur $]0, \hat{T}]$. Pour qu'elle soit C^∞ également en $t = 0$, il faut assurer que l'amplitude des bosses décroît suffisamment vite lorsque t tend vers 0 et, à cet effet, on pose :

$$F_n = \frac{1}{n!}.$$

Faisant ensuite les choix :

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(i+5)^2}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)}, \\ d_n &= \frac{n+5}{(n+1)(n+2)(n+4)} = \frac{n+3}{n+5}(a_n - a_{n+1}), \\ \hat{T} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+5)^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}, \end{aligned}$$

on pose :

$$V(t) = \begin{cases} -\frac{1}{(n+4)!}, & \text{si } t \in [a_{n+1}, a_{n+1} + d_n[, \\ -\frac{1}{(n+4)!} + \frac{F_n}{2} \int_{a_{n+1}+d_n}^t \left(\frac{s - a_{n+1} - d_n}{a_n - a_{n+1} - d_n} \right) ds, & \text{si } t \in [a_{n+1} + d_n, a_n[, \end{cases}$$

puis :

$$U(t) = \int_0^t V(s) ds$$

de sorte que la fonction $U(t)$ a l'allure suivante :

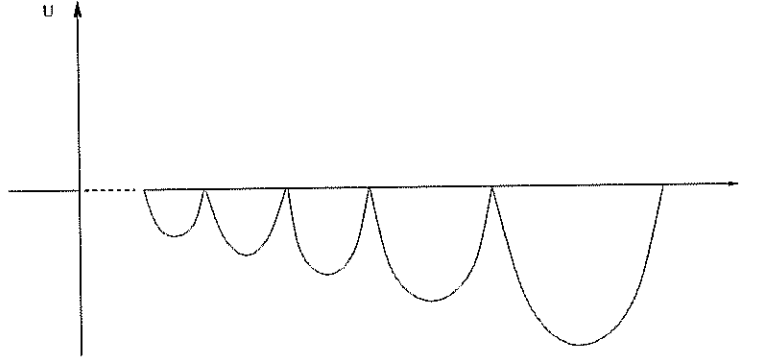


FIG. III.3 – Allure d'une solution pour une loi d'impact élastique

On vérifie facilement que la fonction $V(t)$ est à variation bornée sur $[0, \hat{T}]$ et il en résulte que $U \in MMA([0, \hat{T}]; \mathbb{R})$. Par ailleurs, la fonction $U(t)$ est négative et :

- $\{t \in [0, \hat{T}]; U(t) = 0\} = \{0\} \cup \{a_n; n \in \mathbb{N}^*\},$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dot{U}^-(a_n) = \frac{1}{(n+3)!}, \quad \dot{U}^+(a_n) = -\frac{1}{(n+3)!}.$

Enfin :

$$\ddot{U} - F = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_{a_n}}{(n+3)!} \stackrel{\text{déf}}{=} R$$

(où δ_a est la mesure de Dirac au point a) est bien une mesure négative.

En rassemblant ces résultats on constate que U fournit bien une solution autre que la solution triviale au problème \mathcal{P}_1 associée au choix de la fonction F définie plus haut. Il en résulte que les solutions du problème \mathcal{P}_1 ne sont pas uniques en général, même lorsque $F \in C^\infty$.

III.2.3 Cas d'une loi d'impact complètement inélastique

Considérons le problème \mathcal{P}_1 dans le cas où $e = 0$. Si la fonction F est toujours supposée positive alors le problème \mathcal{P}_1 admet la fonction $U \equiv 0$ comme unique solution. En effet, s'il existait t' tel que $U(t') < 0$, alors, en posant $t'' = \inf\{t; \forall s \in]t, t'], U(s) < 0\}$, on aurait $U(t'') = \dot{U}^+(t'') = 0$ et donc :

$$U(t') = \int_{t''}^{t'} \int_{t''}^s F(\sigma) d\sigma ds \geq 0$$

ce qui est absurde.

La question se pose alors de savoir si la pathologie de non-unicité exhibée dans la section précédente subsiste encore dans le cas où la loi d'impact élastique est remplacée par la loi d'impact complètement inélastique.

Le même type de construction est réalisé pour obtenir un contre-exemple à l'unicité dans ce cas de loi d'impact complètement inélastique ([1]).

Subdivisant l'intervalle $[0, \hat{T}]$ en sous-intervalles du type $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, la fonction F (nécessairement de signe non constant) s'écrit sous la forme $F(0) = 0$ et :

$$F(t) = \begin{cases} -F_{1,n} \varrho\left(\frac{t - \frac{1}{n+1}}{d_{1,n}}\right) & \text{pour } t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} + d_{1,n}[\\ 0 & \text{pour } t \in [\frac{1}{n+1} + d_{1,n}, \frac{1}{n} - d_{2,n}[\\ F_{2,n} \varrho\left(\frac{t - \frac{1}{n} + d_{2,n}}{d_{2,n}}\right) & \text{pour } t \in [\frac{1}{n} - d_{2,n}, \frac{1}{n}[\end{cases} \quad (\text{III.3})$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $(F_{1,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(F_{2,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(d_{1,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(d_{2,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont des suites positives qui seront précisées ultérieurement. Son allure est présentée sur la figure III.4.

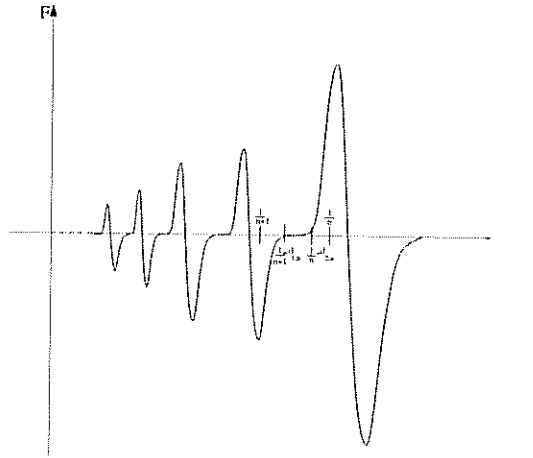


FIG. III.4 – Allure du chargement F pour une loi d'impact inélastique

Les suites $(d_{1,n})_{n>0}$ et $(d_{2,n})_{n>0}$ devront satisfaire :

$$d_{1,n} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \quad d_{2,n} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right). \quad (\text{III.4})$$

Les sous-suites $(F_{1,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(F_{2,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(d_{1,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(d_{2,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ vont être construites de telle sorte que le problème \mathcal{P}_1 admette deux solutions U_1 et U_2 . On demande que les fonctions U_1 et U_2 correspondantes vérifient :

Si n est pair

$$\begin{cases} U_1(\frac{1}{n}) = 0, \\ \dot{U}_1^+(\frac{1}{n}) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} U_2(\frac{1}{n}) = -U_n, \\ \dot{U}_2^+(\frac{1}{n}) = V_n, \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Si n est impair,

$$\begin{cases} U_1(\frac{1}{n}) = -U_n, \\ \dot{U}_1^+(\frac{1}{n}) = V_n, \end{cases} \quad \begin{cases} U_2(\frac{1}{n}) = 0, \\ \dot{U}_2^+(\frac{1}{n}) = 0, \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

où $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont des suites strictement positives qui seront définies ultérieurement. Le fait que U_1 et U_2 satisfassent (III.5) et (III.6) assure qu'elles soient distinctes.

A présent, on se place sur l'intervalle $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ pour tout $n \geq 2$ et on analyse les différentes situations.

Supposons qu'à l'instant $\frac{1}{n+1}$, la particule soit à la position $U = -U_{n+1}$ avec une vitesse $\dot{U}^+ = V_{n+1}$. Sous l'action de la force F sur l'intervalle $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} + d_{1,n}]$, cette particule se retrouve à l'instant $\frac{1}{n} + d_{1,n}$ en contact. Par conséquent, le déplacement croît sur cet intervalle. Ce qui se traduit par la relation :

$$-U_{n+1} + V_{n+1}d_{1,n} - \frac{1}{2}F_{1,n}d_{1,n}^2 = 0, \quad (\text{III.7})$$

obtenue par intégration de l'équation $\ddot{U} = F$ sur l'intervalle $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} + d_{1,n}]$.

La condition de contact unilatéral contraint le déplacement à être négatif ou nul. Ce qui amène à déterminer la valeur de $d_{1,n}$ comme la plus petite racine de l'équation de second degré (III.7). Ainsi :

$$d_{1,n} = \frac{V_{n+1} - \sqrt{V_{n+1}^2 - 2F_{1,n}U_{n+1}}}{F_{1,n}}. \quad (\text{III.8})$$

Sur l'intervalle $[\frac{1}{n+1} + d_{1,n}, \frac{1}{n}]$, le déplacement et la vitesse sont identiquement nuls puisque la particule reste en contact suite à l'impact.

On considère ensuite le cas où la particule en contact à l'instant $\frac{1}{n+1}$ est au repos. Cette particule est à la position $-U_n$ avec une vitesse V_n à l'instant $\frac{1}{n}$. En intégrant la relation $\ddot{U} = F$ et en explicitant la relation $U(t) - U(t') = \int_{t'}^t V(s) ds$ sur l'intervalle $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ ceci se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{cases} V_n = -F_{1,n}d_{1,n} + F_{2,n}d_{2,n}, \\ -U_n = -\frac{1}{2}F_{1,n}d_{1,n}^2 - F_{1,n}d_{1,n} \left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n} \right) + \frac{1}{2}F_{2,n}d_{2,n}^2. \end{cases}$$

Soit,

$$\begin{cases} V_n = -F_{1,n}d_{1,n} + F_{2,n}d_{2,n}, \\ -U_n = \frac{1}{2}F_{1,n}d_{1,n}^2 - F_{1,n}d_{1,n}\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2}F_{1,n}d_{1,n}d_{2,n} + \frac{1}{2}V_nd_{2,n}. \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

Maintenant, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \frac{1}{n^4 2^n}, \quad V_n = \frac{1}{2^n}, \quad F_{1,n} = \frac{n^3}{2^n}. \quad (\text{III.10})$$

L'équation (III.8) donne :

$$d_{1,n} = \frac{1}{2n^3} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4n^3}{(n+1)^4}} \right), \quad (\text{III.11})$$

dont l'estimation asymptotique est :

$$d_{1,n} \sim \frac{1}{n^4}, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (\text{III.12})$$

Les équations du système (III.9) nous permettent de déterminer $d_{2,n}$ et $F_{2,n}$:

$$\begin{aligned} d_{2,n} &= \frac{\frac{2n^2}{n+1}d_{1,n} - n^3d_{1,n}^2 - \frac{2}{n^4}}{1 + n^3d_{1,n}}, \\ F_{2,n} &= F_{1,n}\frac{d_{1,n}}{d_{2,n}} + \frac{V_n}{d_{2,n}}, \end{aligned}$$

qui se comportent comme :

$$d_{2,n} \sim \frac{2}{n^3}, \quad (\text{III.13})$$

quand $n \rightarrow \infty$,

$$F_{2,n} \sim \frac{n^3}{2^{n+1}}.$$

Grâce aux estimations (III.12), (III.13), on a :

$$0 < d_{1,n} < \frac{1}{2n(n+1)},$$

$$\exists n_0, \quad n \geq n_0 \Rightarrow,$$

$$0 < d_{2,n} < \frac{1}{2n(n+1)}.$$

On définit alors $\hat{T} = \frac{1}{n_0}$, et pour $n \geq n_0$, on pose :

$$W_1(0) = 0,$$

$$W_2(0) = 0,$$

$$W_1(t) = \begin{cases} V_{n+1} - F_{1,n} \int_{\frac{1}{n+1}}^t \varrho \left(\frac{s - \frac{1}{n+1}}{d_{1,n}} \right) ds, & \text{si } t \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} + d_{1,n} \right[, \\ 0, & \text{si } t \in \left[\frac{1}{n+1} + d_{1,n}, \frac{1}{n} \right[, \end{cases}$$

$$W_2(t) = \begin{cases} -F_{1,n} \int_{\frac{1}{n+1}}^t \varrho \left(\frac{s - \frac{1}{n+1}}{d_{1,n}} \right) ds, & \text{si } t \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} + d_{1,n} \right[, \\ -F_{1,n} d_{1,n}, & \text{si } t \in \left[\frac{1}{n+1} + d_{1,n}, \frac{1}{n} - d_{2,n} \right[, \\ -F_{1,n} d_{1,n} + F_{2,n} \int_{\frac{1}{n} - d_{2,n}}^t \varrho \left(\frac{s - \frac{1}{n} + d_{2,n}}{d_{2,n}} \right) ds, & \text{si } t \in \left[\frac{1}{n} - d_{2,n}, \frac{1}{n} \right[. \end{cases}$$

Puis dans le but de satisfaire les conditions (III.5), (III.6) :

$$V_1(0) = 0,$$

$$V_2(0) = 0,$$

$$\text{si } t \in \left[\frac{1}{2p+1}, \frac{1}{2p} \right[, \quad (2p \geq n_0), \quad \begin{cases} V_1(t) = W_1(t), \\ V_2(t) = W_2(t), \end{cases}$$

$$\text{si } t \in \left[\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1} \right[, \quad (2p-1 \geq n_0), \quad \begin{cases} V_1(t) = W_2(t), \\ V_2(t) = W_1(t). \end{cases}$$

et enfin :

$$U_1(t) = \int_0^t V_1(s) ds, \quad U_2(t) = \int_0^t V_2(s) ds.$$

Deux solutions sont alors construites pour le problème \mathcal{P}_1 . L'allure des fonctions ainsi construites est la suivantes :

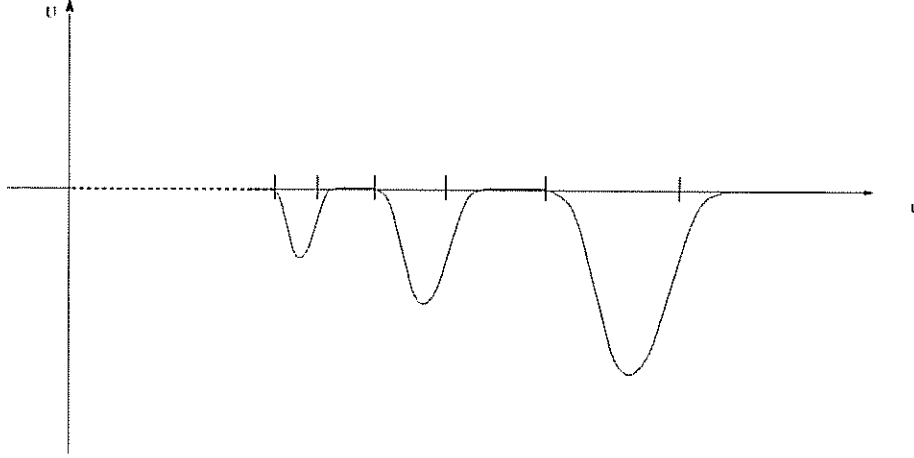


FIG. III.5 – Allure d'une solution

On vérifie facilement que F , ainsi construite, est de classe C^∞ et que $U_1, U_2 \in MMA([0, \hat{T}]; \mathbb{R})$. Il reste à vérifier que U_1 et U_2 sont bien deux solutions du problème \mathcal{P}_1 . Prenons l'exemple de U_2 . L'allure de son graphe sur l'intervalle de temps $[\frac{1}{2p+1}, \frac{1}{2p-1}]$, est représentée par la figure :

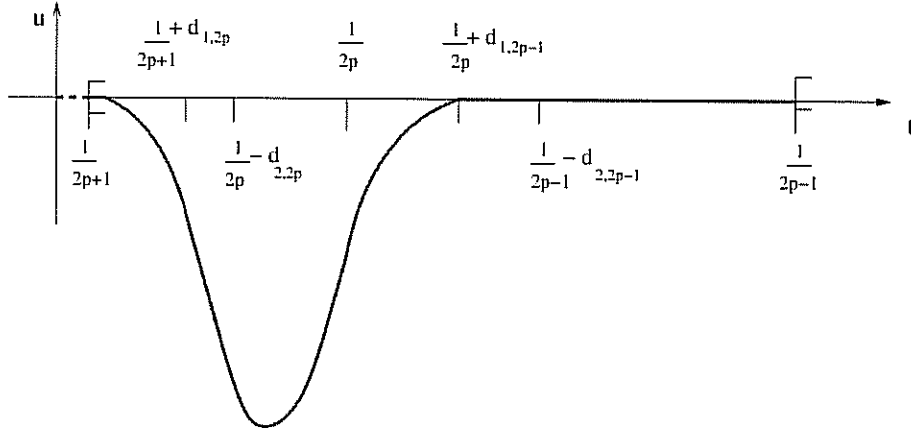


FIG. III.6 – Allure de la solution U_2 sur l'intervalle $[\frac{1}{2p+1}, \frac{1}{2p-1}]$.

Un calcul simple montre alors :

$$\begin{aligned} \ddot{U} - F &= - \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{4^p} \sqrt{1 - \frac{(2p-1)^3}{4p^4}} \delta_{\left(\frac{1}{2p} + d_{1,2p-1}\right)}(t) \right. \\ &\quad \left. + F_{2,2p-1} \varrho \left(\frac{t - \frac{1}{2p-1} + d_{2,2p-1}}{d_{2,2p-1}} \right) \chi_{\left[\frac{1}{2p} + d_{1,2p-1}, \frac{1}{2p-1}\right]}(t) \right\} \stackrel{\text{déf}}{=} R \end{aligned}$$

est bien une mesure négative où $\chi_{]t]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $]t]$. La vérification du fait que U_2 fournit une solution au problème \mathcal{P}_1 est maintenant immédiate. Au final, il n'y a donc pas unicité de solution au problème \mathcal{P}_1 avec une loi d'impact complètement inélastique ($e = 0$), même lorsque $F \in C^\infty([0, \hat{T}]; \mathbb{R})$.

III.3 Cas d'un système masse-ressort et du système de Klarbring

III.3.1 Prise en compte d'un ressort

On ajoute maintenant au système de la section III.2 la prise en compte d'un ressort linéaire de raideur unité.

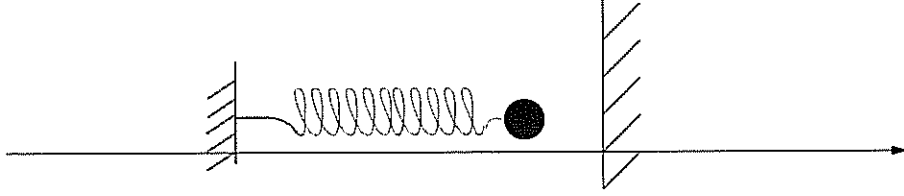


FIG. III.7 – Masse retenue par un ressort.

Le problème d'évolution associé s'écrit maintenant :

\mathcal{P}'_1 : Trouver $U \in MMA([0, \hat{T}]; \mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}([0, \hat{T}]; \mathbb{R})$ tels que :

$$\begin{aligned} U(0) &= 0, \quad \dot{U}^+(0) = 0, \\ \ddot{U} + U &= F + R, \\ U &\leq 0, \quad R \leq 0 \quad UR = 0 \\ U(t) &= 0 \implies \dot{U}^+(t) = 0 \end{aligned}$$

où l'on a adopté la loi d'impact complètement inélastique.

En menant un raisonnement analogue au paragraphe III.2.3, on construit deux solutions au problème \mathcal{P}'_1 pour le chargement F défini par les relations (III.3) dont la régularité est \mathcal{C}^∞ .

On divise alors l'intervalle $[0, \hat{T}]$ en sous-intervalles $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ sur lesquels on construit deux solutions satisfaisant les conditions (III.5) et (III.6). Les suites $(d_{1,n})_{n>0}$ et $(d_{2,n})_{n>0}$ vérifient les conditions (III.4).

On se place sur l'intervalle $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ pour tout $n \geq 1$ et on analyse les différentes situations.

Supposons qu'à l'instant $\frac{1}{n+1}$ la masse soit à la position $U = -U_{n+1}$ avec une vitesse $V = V_{n+1}$. Sous l'action de la force F sur l'intervalle $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} + d_{1,n}]$, cette masse se trouve à l'instant $\frac{1}{n} + d_{1,n}$ en contact. Par conséquent, le déplacement croît sur cet intervalle. Ce qui se traduit par la relation :

$$0 = -U_{n+1} \cos(d_{1,n}) + V_{n+1} \sin(d_{1,n}) - F_{1,n} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n+1} + d_{1,n}} \sin\left(\frac{1}{n+1} + d_{1,n} - s\right) \varrho\left(\frac{s - \frac{1}{n+1}}{d_{1,n}}\right) ds,$$

obtenue par la résolution de l'équation différentielle $\ddot{U} + U = F$ sur l'intervalle $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} + d_{1,n}]$. Après un changement de variable, il vient :

$$0 = -U_{n+1} \cos(d_{1,n}) + V_{n+1} \sin(d_{1,n}) - F_{1,n} d_{1,n} \int_0^1 \sin(d_{1,n}(1-s)) \varrho(s) ds, \quad (\text{III.14})$$

où les suites $(U_n)_{n>0}$, $(V_n)_{n>0}$ et $(F_{1,n})_{n>0}$ sont définies par les relations (III.10).

La condition de contact unilatéral permet de déterminer le paramètre $d_{1,n}$, comme la plus petite valeur positive telle que la relation (III.14) soit satisfaite.

Soit donc $g(x)$ définie par :

$$g(x) = -U_{n+1} \cos(x) + V_{n+1} \sin(x) - F_{1,n} x \int_0^1 \sin(x(1-s)) \varrho(s) ds,$$

qui est une fonction continue.

On a, d'une part $g(0) = -U_{n+1} < 0$, et d'autre part :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}. \quad (\text{III.15})$$

Ainsi,

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad g(x) > -U_{n+1} + \left(\frac{2V_{n+1}}{\pi} - F_{1,n}\right) x. \quad (\text{III.16})$$

Le membre de droite s'annule pour $x = \frac{U_{n+1}}{\frac{2}{\pi}V_{n+1} - F_{1,n}} \sim \frac{\pi}{2n^4}$. Pour $n \geq 2$, $\frac{\pi}{2n^4} \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Par conséquent, il existe des valeurs de $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ telles que le membre droit de l'inégalité (III.16) soit positif.

Ainsi, on en déduit qu'il existe au moins une valeur de x telle que $g(x) = 0$ et on note $d_{1,n}$ la plus petite valeur.

Comme $d_{1,n} \leq \frac{\pi}{2n^4}$, $d_{1,n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. L'équation (III.14) fournit alors l'estimation suivante :

$$d_{1,n} \sim \frac{1}{n^4}, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (\text{III.17})$$

L'instant $\frac{1}{n+1} + d_{1,n}$ est un instant d'impact. Sur l'intervalle $[\frac{1}{n+1} + d_{1,n}, \frac{1}{n}]$, la particule reste en contact. Ainsi, $U = V = 0$.

On considère ensuite le cas où la masse en contact à l'instant $\frac{1}{n+1}$ est au repos. Elle est à la position $-U_n$ avec une vitesse V_n à l'instant $\frac{1}{n}$.

La résolution de l'équation différentielle $\ddot{U} + U = F$ sur l'intervalle $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ permet d'obtenir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} V_n &= -F_{1,n} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n+1} + d_{1,n}} \cos\left(\frac{1}{n+1} + d_{1,n} - s\right) \varrho\left(\frac{s - \frac{1}{n+1}}{d_{1,n}}\right) ds \\ &\quad + F_{2,n} \int_{\frac{1}{n} - d_{2,n}}^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{1}{n} - s\right) \varrho\left(\frac{s - \frac{1}{n} + d_{2,n}}{d_{2,n}}\right) ds, \\ -U_n &= -F_{1,n} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n+1} + d_{1,n}} \sin\left(\frac{1}{n+1} + d_{1,n} - s\right) \varrho\left(\frac{s - \frac{1}{n+1}}{d_{1,n}}\right) ds \\ &\quad + F_{2,n} \int_{\frac{1}{n} - d_{2,n}}^{\frac{1}{n}} \sin\left(\frac{1}{n} - s\right) \varrho\left(\frac{s - \frac{1}{n} + d_{2,n}}{d_{2,n}}\right) ds. \end{aligned}$$

Après un changement de variable, il vient

$$V_n = -F_{1,n}d_{1,n} \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n}s\right) \varrho(s)ds + F_{2,n}d_{2,n} \int_0^1 \cos(d_{2,n}(1-s))\varrho(s)ds, \quad (\text{III.18})$$

$$-U_n = -F_{1,n}d_{1,n} \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n}s\right) \varrho(s)ds + F_{2,n}d_{2,n} \int_0^1 \cos(d_{2,n}(1-s))\varrho(s)ds. \quad (\text{III.19})$$

Les relations (III.18) et (III.19) permettent de prouver l'existence des coefficients $d_{2,n}$ et $F_{2,n}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[U_n - F_{1,n}d_{1,n} \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n}s\right) \varrho(s)ds \right] \int_0^1 \cos(d_{2,n}(1-s))\varrho(s)ds \\ &\quad + \left[V_n + F_{1,n}d_{1,n} \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n}s\right) \varrho(s)ds \right] \int_0^1 \sin(d_{2,n}(1-s))\varrho(s)ds, \\ F_{2,n} &= \frac{1}{d_{2,n}} \frac{V_n + F_{1,n}d_{1,n} \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n}s\right) \varrho(s)ds}{\cos\left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n}s\right) \varrho(s)ds}. \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Le coefficient $d_{2,n}$ solution de l'équation (III.20) existe. En effet, définissons comme précédemment la fonction continue h par :

$$\begin{aligned} h(x) &= \left[U_n - F_{1,n}d_{1,n} \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n}s\right) \varrho(s)ds \right] \int_0^1 \cos(x(1-s))\varrho(s)ds \\ &\quad + \left[V_n + F_{1,n}d_{1,n} \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n}s\right) \varrho(s)ds \right] \int_0^1 \sin(x(1-s))\varrho(s)ds. \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

D'une part, on a

$$h(0) \sim \frac{-F_{1,n}d_{1,n}}{n^2} \sim \frac{-1}{2n^3} < 0.$$

D'autre part, d'après (III.15), on a

$$\begin{aligned}
 & \left[V_n + F_{1,n} d_{1,n} \int_0^1 \cos \left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n} s \right) \varrho(s) ds \right] \int_0^1 \sin(x(1-s)) \varrho(s) ds \\
 & \geq \left[V_n + F_{1,n} d_{1,n} \int_0^1 \cos \left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n} s \right) \varrho(s) ds \right] \frac{2x}{\pi} \int_0^1 \varrho(s) ds, \\
 & \geq \left[V_n + F_{1,n} d_{1,n} \int_0^1 \cos \left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n} s \right) \varrho(s) ds \right] \frac{2x}{\pi},
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \left[U_n - F_{1,n} d_{1,n} \int_0^1 \sin \left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n} s \right) \varrho(s) ds \right] \int_0^1 \cos(x(1-s)) \varrho(s) ds \\
 & \geq U_n - F_{1,n} d_{1,n} \int_0^1 \sin \left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n} s \right) \varrho(s) ds.
 \end{aligned}$$

Il en résulte,

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \quad h(x) & \geq \left[V_n + F_{1,n} d_{1,n} \int_0^1 \cos \left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n} s \right) \varrho(s) ds \right] \frac{2x}{\pi} \\
 & + \left[U_n - F_{1,n} d_{1,n} \int_0^1 \sin \left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n} s \right) \varrho(s) ds \right],
 \end{aligned}$$

où le membre de droite devient positif pour certaines valeurs de x puisqu'il s'agit d'une fonction affine qui s'annule pour une valeur de x voisine de $\frac{\pi}{2n^3} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pour $n \geq 2$.

Ainsi, on a montré l'existence d'au moins une valeur x telle que $h(x) = 0$ et par conséquent d'une plus petite valeur $d_{2,n}$ solution de l'équation (III.20). Comme $d_{2,n} \leq \frac{\pi}{2n^3}$, $d_{2,n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On en déduit :

$$d_{2,n} \sim \frac{2}{n^3}, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (\text{III.23})$$

La relation (III.21) permet d'estimer $F_{2,n}$ comme suit

$$F_{2,n} \sim \frac{n^3}{2^{n+1}}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Grâce aux estimations (III.17) et (III.23), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \exists n_0, \quad n \geq n_0 \Rightarrow \quad & 0 < d_{1,n} < \frac{1}{2n(n+1)}, \\
 & 0 < d_{2,n} < \frac{1}{2n(n+1)}.
 \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

On définit alors $\hat{T} = \frac{1}{n_0}$ et pour tout $n \geq n_0$, on pose

$$W_1(0) = 0,$$

$$W_2(0) = 0,$$

$$W_1(t) = \begin{cases} \sin(t - \frac{1}{n+1})U_{n+1} + \cos(t - \frac{1}{n+1})V_{n+1} & \text{si } t \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} + d_{1,n}\right], \\ -F_{1,n} \int_{\frac{1}{n+1}}^t \cos(t-s) \varrho\left(\frac{s - \frac{1}{n+1}}{d_{1,n}}\right) ds, & \\ 0, & \text{si } t \in \left[\frac{1}{n+1} + d_{1,n}, \frac{1}{n}\right], \end{cases}$$

$$W_2(t) = \begin{cases} -F_{1,n} \int_{\frac{1}{n+1}}^t \cos(t-s) \varrho\left(\frac{s - \frac{1}{n+1}}{d_{1,n}}\right) ds, & \text{si } t \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} + d_{1,n}\right], \\ -F_{1,n} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n+1} + d_{1,n}} \cos(t-s) \varrho\left(\frac{s - \frac{1}{n+1}}{d_{1,n}}\right) ds, & \text{si } t \in \left[\frac{1}{n+1} + d_{1,n}, \frac{1}{n} - d_{2,n}\right], \\ -F_{1,n} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n+1} + d_{1,n}} \cos(t-s) \varrho\left(\frac{s - \frac{1}{n+1}}{d_{1,n}}\right) ds & \text{si } t \in \left[\frac{1}{n} - d_{2,n}, \frac{1}{n}\right], \\ +F_{2,n} \int_{\frac{1}{n} - d_{2,n}}^t \cos(t-s) \varrho\left(\frac{s - \frac{1}{n} + d_{2,n}}{d_{2,n}}\right) ds. & \end{cases}$$

Afin de satisfaire les conditions (III.5), (III.6), on choisit :

$$V_1(0) = 0,$$

$$V_2(0) = 0,$$

$$\text{si } t \in \left[\frac{1}{2p+1}, \frac{1}{2p}\right], \quad (2p \geq n_0), \quad \begin{cases} V_1(t) = W_1(t), \\ V_2(t) = W_2(t), \end{cases}$$

$$\text{si } t \in \left[\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right], \quad (2p-1 \geq n_0), \quad \begin{cases} V_1(t) = W_2(t), \\ V_2(t) = W_1(t), \end{cases}$$

et enfin :

$$U_1(t) = \int_0^t V_1(s) ds \quad U_2(t) = \int_0^t V_2(s) ds.$$

En procédant de la même manière qu'au paragraphe précédent, on montre que U_1 et U_2 sont bien toutes deux solutions du problème \mathcal{P}'_1 .

III.3.2 Application au système de Klarbring

Considérons le système de Klarbring (problème \mathcal{P}_u) dans le cas particulier $m = 1$ et $\underline{K} = \underline{I}$ (pas de couplage entre degrés de liberté normal et tangentiel) et $e = 0$ (loi d'impact complètement inélastique).

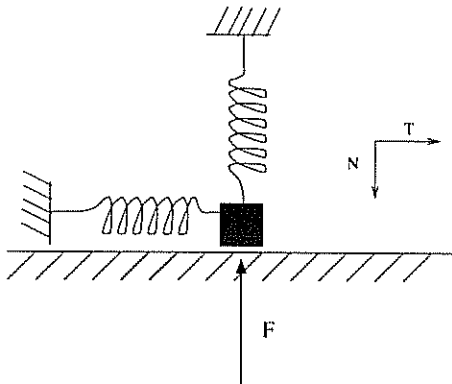


FIG. III.8 – Cas particulier du système de Klarbring

Si on se limite en outre au cas des conditions initiales définies par :

$$\underline{U}_0 = \underline{V}_0 = 0$$

et à une force extérieure toujours colinéaire à la normale à l'obstacle : $F_T \equiv 0$, on constate que le degré de liberté normal U_N est gouverné par le problème d'évolution \mathcal{P}'_1 et, dans le cas particulier du système de Klarbring considéré ici, toute solution U_N du problème \mathcal{P}'_1 complétée par $U_T \equiv 0$ fournit une solution au problème \mathcal{P}_u . Il résulte alors de la construction faite à la section III.3.1 que les solutions au problème \mathcal{P}_u ne sont pas uniques en général, même si $\underline{F} \in C^\infty([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^n)$.

III.4 Existence et unicité pour le contact unilatéral avec frottement de coulomb en dynamique : un problème modèle

Dans ce qui suit, on reprend un article à paraître dans la revue M2AN montrant qu'il y a unicité de solution au problème \mathcal{P}_u si la force extérieure $\underline{F}(t)$ est supposée analytique par morceaux.

EXISTENCE AND UNIQUENESS FOR DYNAMICAL UNILATERAL CONTACT WITH COULOMB FRICTION: A MODEL PROBLEM

PATRICK BALLARD¹ AND STÉPHANIE BASSEVILLE¹

Abstract. A simple dynamical problem involving unilateral contact and dry friction of Coulomb type is considered as an archetype. We are concerned with the existence and uniqueness of solutions of the system with Cauchy data. In the frictionless case, it is known [12] that pathologies of non-uniqueness can exist, even if all the data are of class C^∞ . However, uniqueness is recovered provided that the data are analytic [1]. Under this analyticity hypothesis, we prove the existence and uniqueness of solutions for the dynamical problem with unilateral contact and Coulomb friction, extending [1] to the case where Coulomb friction is added to unilateral contact.

Résumé. On considère un problème d'évolution dynamique modèle, incluant, à la fois, contact unilatéral et frottement sec de type Coulomb. On s'intéresse à la question de l'existence et de l'unicité de l'évolution à partir d'une condition initiale donnée. Dans le cas sans frottement, on sait [12] que, même lorsque toutes les données sont C^∞ , il y a des pathologies possibles de solutions multiples. Requérir que les données soient, non plus seulement C^∞ , mais analytiques, permet alors de prouver l'unicité de solution [1]. Sous cette hypothèse d'analyticité des données, on montre ici existence et unicité de solution au problème d'évolution dynamique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb, étendant ainsi [1] au cas où l'on est en présence de frottement de Coulomb en sus du contact unilatéral.

1991 Mathematics Subject Classification. 70F40, 49J52, 34A60.

The dates will be set by the publisher.

1. DESCRIPTION OF THE PROBLEM

At the time being, dynamics involving unilateral contact and Coulomb friction has been mainly studied in the framework of systems with finite number of degrees of freedom. In this paper, we are concerned with the questions of existence and uniqueness of solutions for the associated evolution problem. In order to make clear the structure of our existence and uniqueness proof, we shall consider only the simple system introduced by KLARBRING [4]. However, the reader should have in mind that the proof presented here can be adapted to a far more general situation. The most general situation in finite d.o.f. dynamics with unilateral contact and Coulomb friction, which is covered by our approach, will be described in a next publication.

Klarbring's system refers to the following situation. Let $n \geq 2$ be some integer. A punctual particle of unit mass in \mathbb{R}^n evolves in a quadratic well of potential elastic energy, described by a symmetric positive definite

Keywords and phrases: unilateral dynamics with friction, existence and uniqueness.

¹ Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, 31, Chemin Joseph Aiguier, 13402 Marseille Cédex 20, France.

e-mail : ballard@lma.cnrs-mrs.fr

© EDP Sciences, SMAI 1999

stiffness matrix K , and is subjected to an external force $F(t)$, depending only on time. Moreover, the particle is constrained to remain in a half-space, and, at contact, Coulomb friction takes place. For $X \in \mathbb{R}^n$, we denote

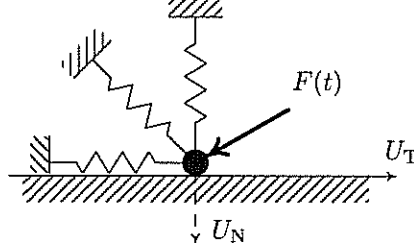


FIGURE 1. Klarbring's system.

by X_N its first component ("normal component") and by X_T the vector of \mathbb{R}^{n-1} formed by the $n - 1$ last components of X ("tangential component"). The symmetric positive definite stiffness matrix K will be written as:

$$K = \begin{pmatrix} k_N & {}^tW \\ W & K_T \end{pmatrix},$$

where $k_N \in \mathbb{R}$, $W \in \mathbb{R}^{n-1}$ and K_T is a symmetric positive definite real matrix of order $n - 1$. The two following statements are equivalent.

- (i) The matrix K is positive definite.
- (ii) The matrix K_T is positive definite and $k_N > {}^tW \cdot K_T^{-1} \cdot W$.

The term W couples the normal and tangential degrees of freedom and is a source of difficulty in the analysis of the system.

We denote by $MMA([0, T]; \mathbb{R}^n)$ (motions with measure acceleration) the vector space of those integrable functions of $[0, T]$ into \mathbb{R}^n whose second derivative in the sense of distributions is a measure. It is nothing but the space of integrals of functions of bounded variation over $[0, T]$. Functions U in MMA are continuous and admit left and right derivatives (in the classical sense) \dot{U}^- , \dot{U}^+ , at any point, both being functions of bounded variation. We recall that a function of bounded variation, being uniform limit of a sequence of step functions, is universally integrable (integrable with respect to any measure). The evolution problem is formulated along the lines of MOREAU [6, 8] and in the sequel, the term "unilateral problem" will refer to the following evolution problem:

Problem \mathcal{P}_u . Find $U \in MMA([0, T]; \mathbb{R}^n)$ and $R \in \mathcal{M}([0, T]; \mathbb{R}^n)$ such that:

- $U(0) = U_0$; $\dot{U}^+(0) = V_0$ (initial condition),
- $\ddot{U} + K \cdot U = F + R$, in $[0, T]$ (motion equation),
- $U_N \leq 0$, $R_N \leq 0$, $U_N R_N = 0$ (unilateral contact),
- $\int_{[0, T]} \left[R_T \cdot (V - \dot{U}_T^+) - \mu R_N (|V| - |\dot{U}_T^+|) \right] \geq 0$, $\forall V \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$ (Coulomb friction),
- $U_N(t) = 0 \implies \dot{U}_N^+(t) = -e \dot{U}_N^-(t)$, in $]0, T]$ (impact law),

where F denotes a given integrable function of $[0, T]$ into \mathbb{R}^n (external force), μ a given nonnegative real constant (friction coefficient), $e \in [0, 1]$ a real constant (restitution coefficient) and (U_0, V_0) some initial condition,

assumed to be compatible with the unilateral constraint:

$$U_{0N} \leq 0 \quad \text{and:} \quad U_{0N} = 0 \quad \implies \quad V_{0N} \leq 0.$$

Our goal is to investigate the existence and uniqueness of a solution of problem \mathcal{P}_u .

2. REVIEW OF EXISTING RESULTS AND CONTENT

Well-posedness of the dynamics of discrete systems with unilateral constraints (without friction) seems to have been first investigated by SCHATZMAN in [11], where she proved an existence result by a penalization technique in the case of the elastic impact law $e = 1$. She also gave a striking counter-example showing that, even in the case where the data have regularity C^∞ , one cannot expect uniqueness of solution, in general. A major remark was, then, made by PERCIVALE in [10] who noticed that, in the case of the (necessarily frictionless) one-degree-of-freedom problem with external force depending only on time, uniqueness of solution is recovered provided the external force is assumed to be an *analytic* function of time (instead of C^∞). Later, SCHATZMAN [12] provided a generalization of this uniqueness result under analyticity assumption, still for the one-degree-of-freedom problem, but in the more general case where the external force is allowed to depend not only on time but also on current position and velocity. However, her proof was specific to the one-degree-of-freedom problem. A simpler proof was given by BALLARD [1] who was, then, able to extend the result to the general case of an arbitrary number of degrees of freedom and unilateral constraints. But his result was restricted to the frictionless situation.

The case of dry friction has been considered by MONTEIRO MARQUES in [7]. He considered a case with a single smooth unilateral constraint and inelastic impact law $e = 0$ which contains Klarbring's system (provided $e = 0$). Using a time-stepping algorithm introduced by MOREAU (which is, roughly speaking, an adaptation of the implicit Euler scheme to the non-smooth situation under consideration) to build a sequence of approximants, MONTEIRO MARQUES was able to pass to the limit by extraction of a subsequence using a compactness argument, to prove an existence result which applies to Klarbring's system in the case $e = 0$ and $F \in L^1$. However, note that Klarbring's system, in the particular case $W = 0$ and $F_T \equiv 0$, reduces to a one-degree-of-freedom system in which Coulomb friction plays no role, and, SCHATZMAN's counter-example [11] can be readily adapted to this particular case of Klarbring's system, demonstrating that one cannot expect uniqueness in general, even in the case where the external force is assumed to have C^∞ regularity. Therefore, our purpose, here, is to adapt the technique of BALLARD [1] to the situation where Coulomb friction is involved, to prove the uniqueness of a solution under the assumption that F is an *analytic* function of time.

In the frictionless situation, BALLARD's uniqueness proof relied on the fact that the associated bilateral problem is governed by an ordinary differential equation, whose solution is analytic provided the data of the problem are analytic. In the situation under consideration, the associated bilateral problem is governed by a differential inclusion (multivocal differential equation) because of Coulomb friction. The Cauchy problem associated with the bilateral problem is studied in section 3. First, the existence and uniqueness of a solution is proved by use of standard monotonicity techniques in section 3.1. Then, it is proved in section 3.2 that the restriction of the solution on some right-neighbourhood of the time origin is analytic, provided the external force is analytic. The analysis of the bilateral problem, as performed in section 3, is used in section 4.1 to build a local analytic solution of the unilateral problem with analytic external force. Then, to obtain well-posedness for the unilateral problem, there remains only to prove that there cannot exist any other local solution in MMA , different from the local analytic one. This is performed in section 4.2 by adapting BALLARD's strategy [1] to the situation under consideration.

3. THE BILATERAL PROBLEM

In the sequel, the "bilateral problem" will refer to the evolution problem we obtain when the unilateral constraint is replaced by a bilateral constraint. More precisely, this is the following evolution problem.

Problem \mathcal{P}_b . Find $U \in MMA([0, T]; \mathbb{R}^n)$ and $R \in \mathcal{M}([0, T]; \mathbb{R}^n)$ such that:

- $U(0) = U_0$; $\dot{U}^+(0) = V_0$ (initial condition),
- $\ddot{U} + K \cdot U = F + R$, in $[0, T]$ (motion equation),
- $U_N \equiv 0$ (bilateral contact),
- $\int_{[0, T]} [R_T \cdot (V - \dot{U}_T^+) + \mu |R_N| (|V| - |\dot{U}_T^+|)] \geq 0, \quad \forall V \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$ (Coulomb friction),

where F denotes some given integrable function ($F \in L^1([0, T]; \mathbb{R})$) and (U_0, V_0) some initial condition, assumed to be compatible with the bilateral constraint:

$$U_{0N} = 0 \quad \text{and} \quad V_{0N} = 0.$$

Actually, the first component of the motion equation:

$$R_N = W \cdot U_T - F_N,$$

shows that the measure R_N is necessarily absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure. Since the Coulomb friction law implies the following inequality between measures:

$$|R_T| \leq \mu |R_N|,$$

we infer that the measure R_T is also absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure. As a result, any solution $(U, R) \in MMA \times \mathcal{M}$ of problem \mathcal{P}_b belongs, actually, to $W^{2,1} \times L^1$. For \mathcal{C} being a nonempty closed convex subset of \mathbb{R}^{n-1} , we denote by $\partial S_{\mathcal{C}}$ the subdifferential of its support function $S_{\mathcal{C}}$. In the sequel, \mathcal{B} will be the closed unit ball of Euclidean \mathbb{R}^{n-1} . Using these notations, we have the following equivalent formulation for problem \mathcal{P}_b .

Problem \mathcal{P}_b . Find $U_T \in W^{2,1}([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$ such that:

- $U_T(0) = U_{0T}$; $\dot{U}_T(0) = V_{0T}$ (initial condition),
- $\ddot{U}_T(t) + K_T \cdot U_T(t) - F_T(t) \in \partial S_{\mu |F_N(t) - W \cdot U_T(t)| \mathcal{B}} [-\dot{U}_T(t)], \quad \text{for a.a. } t \in [0, T].$

3.1. The bilateral problem with integrable force

In this section, we prove the existence and uniqueness of a solution of problem \mathcal{P}_b by monotonicity techniques.

Proposition 3.1. *Let $r \in \mathbb{R}^+$ and $F_T \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$. Then, there exists a unique $U_T \in W^{2,1}([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$ such that:*

- $U_T(0) = U_{0T}$; $\dot{U}_T(0) = V_{0T}$ (initial condition),
- $\ddot{U}_T(t) + K_T \cdot U_T(t) - F_T(t) \in \partial S_{r\mathcal{B}} [-\dot{U}_T(t)], \quad \text{for a.a. } t \in [0, T].$

Proof.

Uniqueness. Straightforward by monotonicity of the subdifferential.

Existence. We shall use a Caratheodory type construction, implicit with respect to the subdifferential term. Let V_T^n be the sequence of functions in $W^{1,1}([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$ defined by:

$$V_T^0 \equiv V_{0T},$$

and by the following induction. Given the function $V_T^n \in W^{1,1}([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$, the function V_T^{n+1} is defined to be the unique solution in $W^{1,1}([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$, provided by Proposition 3.4, p. 69 of [2], of the evolution problem:

- $V_T^{n+1}(0) = V_{0T}$,
- $\dot{V}_T^{n+1}(t) + K_T \cdot \left(U_{0T} + \int_0^t V_T^n(s) ds \right) - F_T(t) \in \partial S_{rB}[-V_T^{n+1}(t)],$ for a.a. t .

By monotonicity of the subdifferential, it is easily seen that, for all $t \in [0, T]$:

$$\frac{1}{2} |V_T^{n+1}(t) - V_T^n(t)|^2 + \int_0^t [V_T^{n+1}(s) - V_T^n(s)] \cdot K_T \cdot \int_0^s [V_T^n(\sigma) - V_T^{n-1}(\sigma)] \leq 0,$$

where $|\cdot|$ denotes the Euclidean norm in \mathbb{R}^{n-1} . Using the same notation for the associated matrix norm, we get:

$$\frac{1}{2} |V_T^{n+1}(t) - V_T^n(t)|^2 \leq |K_T| \int_0^t |V_T^{n+1}(s) - V_T^n(s)| \int_0^s |V_T^n(\sigma) - V_T^{n-1}(\sigma)|,$$

and, by Lemma A.5, p. 157 of [2]:

$$\begin{aligned} |V_T^{n+1}(t) - V_T^n(t)| &\leq |K_T| \int_0^t \int_0^s |V_T^n(\sigma) - V_T^{n-1}(\sigma)|, \\ &\leq |K_T| T \int_0^t |V_T^n(s) - V_T^{n-1}(s)|, \\ &\leq \frac{(|K_T| T)^n}{n!} \|V_T^1 - V_T^0\|_{C^0}, \end{aligned}$$

for all $t \in [0, T]$. As a consequence, the sequence $(V_T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges, uniformly on $[0, T]$, towards some limit $V_T \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$. Now, let $W_T \in W^{1,1}([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$ be the solution of the evolution problem:

- $W_T(0) = V_{0T}$,
- $\dot{W}_T(t) + K_T \cdot \left(U_{0T} + \int_0^t V_T(s) ds \right) - F_T(t) \in \partial S_{rB}[-W_T(t)],$ for a.a. t .

Now, taking the difference of this differential inclusion with the one defining V_T^n , multiplying by $W_T - V_T^n$ and integrating, we get, thanks to the monotonicity of the subdifferential and to Lemma A.5, p. 157 of [2]:

$$|W_T(t) - V_T^n(t)| \leq |K_T| T \int_0^t |V_T(s) - V_T^{n-1}(s)|,$$

for all $t \in [0, T]$, which shows that the sequence $(V_T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges, uniformly on $[0, T]$, towards W_T . Hence, $V_T = W_T \in W^{1,1}$ and we have:

- $V_T(0) = V_{0T}$,
- $\dot{V}_T(t) + K_T \cdot \left(U_{0T} + \int_0^t V_T(s) ds \right) - F_T(t) \in \partial S_{rB}[-V_T(t)],$ for a.a. t .

Setting:

$$U_T(t) = U_{0T} + \int_0^t V_T(s) ds,$$

we see that $U_T \in W^{2,1}([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$ and provides the solution we sought. \square

Proposition 3.2. *Let $r \in L^1([0, T]; \mathbb{R})$ be a nonnegative integrable function and assume $F_T \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$. Then, there exists a unique $U_T \in W^{2,1}([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$ such that:*

- $U_T(0) = U_{0T} \quad ; \quad \dot{U}_T(0) = V_{0T} \quad (\text{initial condition}),$
- $\ddot{U}_T(t) + K_T \cdot U_T(t) - F_T(t) \in \partial S_{r(t), B}[-\dot{U}_T(t)], \quad \text{for a.a. } t \in [0, T].$

Proof.

Uniqueness. Straightforward by monotonicity of the subdifferential.

Existence. Let $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of nonnegative step functions on $[0, T]$, converging towards r in $L^1([0, T]; \mathbb{R})$. By Proposition 3.1, there exists a unique solution $U_T^n \in W^{2,1}([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$ of:

- $U_T^n(0) = U_{0T} \quad ; \quad \dot{U}_T^n(0) = V_{0T} \quad (\text{initial condition}),$
 - $\ddot{U}_T^n(t) + K_T \cdot U_T^n(t) - F_T(t) \in \partial S_{r^n(t), B}[-\dot{U}_T^n(t)], \quad \text{for a.a. } t \in [0, T].$
- (1)

Step 1. *The sequences $(U_T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(\dot{U}_T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ are Cauchy sequences in C^0 and, then, converge towards some limits U_T and \dot{U}_T in C^0 .*

Indeed:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\dot{U}_T^{n+p}(t) - \dot{U}_T^n(t)|^2 + \frac{1}{2} [U_T^{n+p}(t) - U_T^n(t)] \cdot K_T \cdot [U_T^{n+p}(t) - U_T^n(t)] &\leq - \int_0^t (r^{n+p} - r^n) (|\dot{U}_T^{n+p}| - |\dot{U}_T^n|), \\ &\leq \int_0^t |r^{n+p} - r^n| \cdot |\dot{U}_T^{n+p} - \dot{U}_T^n(t)|. \end{aligned}$$

The conclusion follows by use of Lemma A.5, p. 157 of [2].

Step 2. $\dot{U}_T \in W^{1,1}$.

Pick $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t$. Multiplying differential inclusion (1) by $\dot{U}_T^n(s) - \dot{U}_T^n(t_1)$ and integrating over $[t_1, t]$, we get:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\dot{U}_T^n(t) - \dot{U}_T^n(t_1)|^2 + \frac{1}{2} |U_T^n(t) - U_T^n(t_1) - (t - t_1)\dot{U}_T^n(t_1)|_{K_T}^2 \\ \leq \int_{t_1}^t |F_T(s) - K_T \cdot [U_T^n(t_1) + (s - t_1)\dot{U}_T^n(t_1)]| \cdot |\dot{U}_T^n(s) - \dot{U}_T^n(t_1)| \, ds + \int_{t_1}^t r^n(s) |\dot{U}_T^n(s) - \dot{U}_T^n(t_1)| \, ds, \end{aligned}$$

where $|\cdot|_{K_T}$ denotes the norm on \mathbb{R}^{n-1} which is associated with the scalar product defined by the symmetric positive definite matrix K_T . Using, once more, Lemma A.5, p. 157 of [2], we obtain:

$$|\dot{U}_T^n(t_2) - \dot{U}_T^n(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} [|F_T(s)| + r^n(s) + M] \, ds, \quad (2)$$

where M is some real constant, independant on t_1 , t_2 and n . Taking the limit $n \rightarrow \infty$, we get:

$$|\dot{U}_T(t_2) - \dot{U}_T(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} [|F_T(s)| + r(s) + M] \, ds,$$

which shows that \dot{U}_T is absolutely continuous.

Step 3. U_T is a solution of the evolution problem under consideration.

Inequality (2) gives :

$$\|\dot{U}_T^n\|_{L^1} \leq MT + \|r^n\|_{L^1} + \|F_T\|_{L^1} \leq M',$$

where M' is a real constant independent of n . Therefore, extracting a subsequence if necessary, the sequence $(\dot{U}_T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges in $\mathcal{M}([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$ weak-*. Its limit is necessarily \dot{U}_T . Now, U_T^n being a solution of evolution problem (1), we have:

$$\begin{aligned} \forall V \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^{n-1}), \\ \int_0^T r^n(s) |V(s)| ds \geq \int_0^T r^n(s) |\dot{U}_T^n(s)| ds + \int_0^T [\ddot{U}_T^n(s) + K_T \cdot U_T^n(s) - F_T(s)] [V(s) + \dot{U}_T^n(s)] ds. \end{aligned}$$

Thanks to the convergence properties of all the sequences involved, we can take the limit as $n \rightarrow \infty$ in this inequality. We deduce that U_T is a solution of the evolution problem under consideration. \square

Proposition 3.3. Let $W \in \mathbb{R}^{n-1}$, $F_N \in L^1([0, T]; \mathbb{R})$ and $F_T \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$. Then, there exists a unique $U_T \in W^{2,1}([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$ such that:

- $U_T(0) = U_{0T}$; $\dot{U}_T(0) = V_{0T}$ (initial condition),
- $\ddot{U}_T(t) + K_T \cdot U_T(t) - F_T(t) \in \partial S_{\mu|F_N(t)-W \cdot U_T(t)|, B}[-\dot{U}_T(t)]$, for a.a. $t \in [0, T]$.

Proof.

Uniqueness. If U_T^1 and U_T^2 denote two solutions, then we have:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\dot{U}_T^1(t) - \dot{U}_T^2(t)|^2 + \frac{1}{2} |U_T^1(t) - U_T^2(t)|_{K_T}^2 &\leq \mu \int_0^t |W \cdot U_T^1(s) - W \cdot U_T^2(s)| \cdot |\dot{U}_T^1(s) - \dot{U}_T^2(s)| ds, \\ &\leq \frac{\mu |W|}{2} \int_0^t (|\dot{U}_T^1(s) - \dot{U}_T^2(s)|^2 + |U_T^1(s) - U_T^2(s)|^2) ds, \end{aligned}$$

and, therefore, $U_T^1 \equiv U_T^2$, by Gronwall's lemma.

Existence. Let U_T^n be the sequence of functions in $W^{2,1}([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$ defined by:

$$U_T^0(t) = U_{0T} + V_{0T} t,$$

and by the following induction: knowing the function $U_T^n \in W^{2,1}([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$, U_T^{n+1} is the unique solution in $W^{2,1}([0, T]; \mathbb{R}^{n-1})$, provided by Proposition 3.2, of the evolution problem:

- $U_T^{n+1}(0) = U_{0T}$; $\dot{U}_T^{n+1}(0) = V_{0T}$ (initial condition),
- $\ddot{U}_T^{n+1}(t) + K_T \cdot U_T^{n+1}(t) - F_T(t) \in \partial S_{\mu|F_N(t)-W \cdot U_T^n(t)|, B}[-\dot{U}_T^{n+1}(t)]$, for a.a. t .

First, we get:

$$\frac{1}{2} |\dot{U}_T^{n+1}(t) - \dot{U}_T^n(t)|^2 + \frac{1}{2} |U_T^{n+1}(t) - U_T^n(t)|_{K_T}^2 \leq \mu |W| \int_0^t |U_T^n(s) - U_T^{n-1}(s)| \cdot |\dot{U}_T^{n+1}(s) - \dot{U}_T^n(s)| ds, \quad (3)$$

and then, by Lemma A.5, p. 157 of [2] :

$$|U_T^{n+1}(t) - U_T^n(t)| \leq C \int_0^t |U_T^n(s) - U_T^{n-1}(s)| ds,$$

where C is a real constant independent of t and n . Reusing the argument in the proof of Proposition 3.1, we obtain first the uniform convergence of the sequence $(U_T^n)_{n \in \mathbb{N}}$, and then, coming back to inequality (3), the uniform convergence of sequence $(\dot{U}_T^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Then, it can be shown, exactly as in the proof of Proposition 3.1, that this limit provides the solution we sought. \square

3.2. The bilateral problem with analytic force

The aim of this section is to prove that, if the external force F is not only integrable but *analytic*, then the solution of the bilateral problem \mathcal{P}_b provided by Proposition 3.3 is *analytic* on some right-neighbourhood of $t = 0$.

Lemma 3.4. *Let n be a positive integer, \mathcal{O} a neighbourhood of $(0, 0)$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $G : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ an analytic function and A a real square matrix of order n without any eigenvalue in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Then, there exist $\eta > 0$ and an analytic function $X : [0, \eta[\rightarrow \mathbb{R}^n$ which is a solution of the Cauchy problem:*

- $X(0) = 0$,
- $\dot{X}(t) = \frac{1}{t} A \cdot X(t) + G(X(t), t), \quad \forall t \in]0, \eta[.$

Moreover, any other analytic solution of this Cauchy problem is, either a restriction, or an analytic extension of $X(t)$.

Proof. For the sake of clarity, the proof is presented only in the particular case $n = 1$. For $|X| < r$ and $|t| < r$, we can write:

$$G(X, t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} g_{ij} X^i t^j.$$

Then, for $|X| < r$ and $|t| < r$, set:

$$\tilde{G}(X, t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} |g_{ij}| X^i t^j,$$

and consider the Cauchy problem:

- $\tilde{X}(0) = 0$,
- $\frac{d}{dt} \tilde{X}(t) = \tilde{G}(\tilde{X}(t), t), \quad \forall t.$

that admits a unique local solution \tilde{X} which, moreover, is analytic (Theorem 1, p. 214 of [3]). This solution can be expanded in a power series:

$$\tilde{X}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{x}_i t^i,$$

which converges in a neighbourhood of $t = 0$. The coefficients \tilde{x}_i are inductively computed by substituting the power series expansion into the differential equation. This procedure gives, for all $k \in \mathbb{N}$:

$$(k+1)\tilde{x}_{k+1} = P_{k+1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k; |g_{ij}|), \quad (4)$$

where P_{k+1} is a polynomial with integer coefficients, and arguments $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$ and a finite number of $|g_{ij}|$. An induction argument based on equation (4) shows that all the \tilde{x}_i are uniquely determined and satisfy in addition:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \tilde{x}_{k+1} \geq 0.$$

Note that all the polynomials P_{k+1} have the property:

$$\forall \alpha \geq 1, \quad \forall \tilde{x}_i \in \mathbb{R}, \quad \left| P_{k+1}(\alpha \tilde{x}_1, \alpha^2 \tilde{x}_2, \dots, \alpha^k \tilde{x}_k; |g_{ij}|) \right| \leq \alpha^k P_{k+1}(|\tilde{x}_1|, |\tilde{x}_2|, \dots, |\tilde{x}_k|; |g_{ij}|) \quad (5)$$

Now, let us come back to the Cauchy problem:

- $X(0) = 0,$
- $\dot{X}(t) = \frac{1}{t} A X(t) + G(X(t), t),$

and search a solution as a formal power series:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i t^i.$$

Substituting this expression into the differential equation, we obtain, for all $k \in \mathbb{N}$:

$$(k+1-A)x_{k+1} = P_{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_k; g_{ij}). \quad (6)$$

Set:

$$\alpha = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{k+1}{k+1-A} \right\} \quad (\alpha \geq 1),$$

which is finite, since, by hypothesis, A is not a positive integer. By virtue of the induction equation (6), we have, for all $k \in \mathbb{N}$:

$$|x_{k+1}| \leq \frac{\alpha}{k+1} P_{k+1}(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_k|; |g_{ij}|).$$

By induction based on property (5), we get:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |x_{k+1}| \leq \alpha^{k+1} \tilde{x}_{k+1},$$

which proves that the convergence radius of the power series $\sum_{i \geq 1} x_i t^i$ is positive and, thus, gives the desired conclusion.

In the case where n is arbitrary, the argument is similar, using the maximum norm on \mathbb{R}^n instead of the absolute value; the constant α is then defined by:

$$\alpha = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ (k+1) \left\| [(k+1)I - A]^{-1} \right\|_{\infty} \right\} \quad (\alpha \geq 1),$$

where I is the identity matrix and $\|\cdot\|_{\infty}$ denotes the matrix norm associated with the maximum norm on \mathbb{R}^n . \square

Proposition 3.5. *Let $F_N : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ and $F_T : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ be two analytic functions. Then, there exists $\eta > 0$ such that the restriction to $[0, \eta[$ of $U_T \in W^{2,1}$, provided by Proposition 3.3, is analytic.*

Proof. By the assumed analyticity of functions $F_N(t)$ and $F_T(t)$, there exists $\eta > 0$ such that, necessarily, one of the following three cases occurs.

Case 1. $V_{0T} \neq 0$.

Case 2. $V_{0T} = 0$ and $\forall t \in]0, \eta[, \quad |F_T(t) - K_T \cdot U_{0T}| \leq \mu |F_N(t) - W \cdot U_{0T}|$.

Case 3. $V_{0T} = 0$ and $\forall t \in]0, \eta[, \quad |F_T(t) - K_T \cdot U_{0T}| > \mu |F_N(t) - W \cdot U_{0T}|$.

Thus, we are going to prove that the conclusion is reached in any of these cases.

Case 1. $V_{0T} \neq 0$.

Let \mathcal{O} be an open neighbourhood of V_{0T} in \mathbb{R}^{n-1} which does not contain 0. Then, the function:

$$\begin{cases} \mathcal{O} & \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ V & \mapsto \frac{V}{|V|} \end{cases}$$

is analytic. Cauchy-Lipschitz' theorem provides a solution $U_T \in C^2([0, \alpha[; \mathbb{R}^{n-1})$ of the Cauchy problem:

$$\begin{aligned} & \bullet \quad U_T(0) = U_{0T} \quad ; \quad \dot{U}_T(0) = V_{0T}, \\ & \bullet \quad \ddot{U}_T(t) + K_T \cdot U_T(t) + \mu |F_N(t) - W \cdot U_T(t)| \frac{\dot{U}_T(t)}{|\dot{U}_T(t)|} = F_T(t), \\ & \bullet \quad \dot{U}_T(t) \in \mathcal{O}. \end{aligned} \tag{7}$$

Now, seeking a solution of (7) as a formal power series:

$$U_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k t^k,$$

and substituting into (7), we have necessarily:

$$\lambda_0 = U_{0T}, \quad \lambda_1 = V_{0T}$$

and then:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left\{ F_T(0) - K_T \cdot U_{0T} - |F_N(0) - W \cdot U_{0T}| \frac{V_{0T}}{|V_{0T}|} \right\}.$$

Replacing the term $|F_N(t) - W \cdot U_T(t)|$, in (7), by $\pm [F_N(t) - W \cdot U_T(t)]$ according to the sign of the first nonzero term of the formal power series expansion of $[F_N(t) - W \cdot U_T(t)]$, it is readily seen, by induction, that the sequence $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is uniquely determined. Only two cases are possible.

Case 1.1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{F_N^{(n)}(0)}{n!} = W \cdot \lambda_n,$

in which case the solution of the Cauchy problem:

$$\begin{aligned} & \bullet \quad U_T(0) = U_{0T} \quad ; \quad \dot{U}_T(0) = V_{0T}, \\ & \bullet \quad \ddot{U}_T(t) + K_T \cdot U_T(t) = F_T(t), \\ & \bullet \quad \dot{U}_T(t) \in \mathcal{O}, \end{aligned}$$

which is analytic by Theorem 1, p. 214 of [3], has the λ_n as coefficients of its power series expansion at 0. Hence, the λ_n are the coefficients of the power series expansion at 0 of a certain analytic function defined on a right-neighbourhood of 0 and which solves problem (7) and therefore the Cauchy problem of Proposition 3.3.

Case 1.2. $\forall n \in \{0, 1, \dots, n_0 - 1\}, \quad \frac{F_N^{(n)}(0)}{n!} = W \cdot \lambda_n, \quad \text{and} \quad \frac{F_N^{(n_0)}(0)}{n_0!} \neq W \cdot \lambda_{n_0},$

in which case the analytic solution of the Cauchy problem:

$$\begin{aligned} & \bullet \quad U_T(0) = U_{0T} \quad ; \quad \dot{U}_T(0) = V_{0T}, \\ & \bullet \quad \ddot{U}_T(t) + K_T \cdot U_T(t) + \mu \operatorname{sgn} \left[\frac{F_N^{(n_0)}(0)}{n_0!} - W \cdot \lambda_{n_0} \right] [F_N(t) - W \cdot U_T(t)] \frac{\dot{U}_T(t)}{|\dot{U}_T(t)|} = F_T(t), \\ & \bullet \quad \dot{U}_T(t) \in \mathcal{O}, \end{aligned}$$

is a solution of problem (7) on a right-neighbourhood of $t = 0$ and therefore solves the Cauchy problem of Proposition 3.3.

Case 2. $V_{0T} = 0$ and $\forall t \in]0, \eta[, \quad |F_T(t) - K_T \cdot U_{0T}| \leq \mu |F_N(t) - W \cdot U_{0T}|$.

In this case, it is readily checked that the constant function $U_T \equiv U_{0T}$ on $[0, \eta[$ (which is analytic) provides a solution on $[0, \eta[$ of the Cauchy problem of Proposition 3.3.

Case 3. $V_{0T} = 0$ and $\forall t \in]0, \eta[, \quad |F_T(t) - K_T \cdot U_{0T}| > \mu |F_N(t) - W \cdot U_{0T}|$.

This case is the most tricky to examine. Our technique will consist to transform problem (7) into a form on which Lemma 3.4 applies.

By the assumed analyticity of functions $F_N(t)$ and $F_T(t)$, together with the hypothesis of case 3, we know that there exist two integers n_0 and $n_1 \geq n_0$ such that:

$$F_T(t) - K_T \cdot U_{0T} \sim \alpha t^{n_0}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\},$$

$$F_N(t) - W \cdot U_{0T} \sim \beta t^{n_1}, \quad \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

when t goes to 0 (in case where $F_N(t) \equiv W \cdot U_{0T}$, just set $n_1 = +\infty$ in the sequel). Let us look for a formal power series solution of problem (7). It is readily checked that the first nonzero term of the formal power series associated to $U_T - U_{0T}$ can be written:

$$\gamma t^{n_0+2},$$

where γ must satisfy the equation:

$$(n_0 + 2)(n_0 + 1)\gamma + \mu \delta_{n_0}^{n_1} |\beta| \frac{\gamma}{|\gamma|} = \alpha. \quad (8)$$

Here, $\delta_{n_0}^{n_1}$ denotes the Kronecker index (which equals 1, if $n_0 = n_1$, and 0, otherwise). The solution of equation (8) is:

$$\gamma = \frac{|\alpha| - \mu \delta_{n_0}^{n_1} |\beta|}{(n_0 + 2)(n_0 + 1)} \cdot \frac{\alpha}{|\alpha|}.$$

Then, we define new unknown functions, for $t > 0$, by:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_T &= \frac{U_T - U_{0T}}{t^{n_0+1}}, \\ \tilde{V}_T &= \frac{\dot{U}_T}{(n_0 + 2)t^{n_0+1}} - \gamma. \end{aligned}$$

Hence, for $t > 0$, the functions \tilde{U}_T and \tilde{V}_T are related by the differential equation:

$$\frac{d}{dt} \tilde{U}_T = -\frac{n_0 + 1}{t} \tilde{U}_T + (n_0 + 2)(\tilde{V}_T + \gamma).$$

Now, there remains to write the differential equation in problem (7) in terms of the new unknown functions \tilde{U}_T and \tilde{V}_T . We get:

$$\frac{d}{dt} \tilde{V}_T = -\frac{n_0 + 1}{t} (\tilde{V}_T + \gamma) - \frac{1}{n_0 + 2} K_T \cdot \tilde{U}_T + \frac{F_T - K_T \cdot U_{0T}}{(n_0 + 2)t^{n_0+1}} - \frac{\mu}{n_0 + 2} \left| \frac{F_N - W \cdot U_{0T}}{t^{n_0+1}} - W \cdot \tilde{U}_T \right| \frac{\gamma + \tilde{V}_T}{|\gamma + \tilde{V}_T|},$$

which is, using definition (8) of γ , nothing but:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{V}_T = & -\frac{n_0+1}{t} \tilde{V}_T - \frac{1}{n_0+2} K_T \cdot \tilde{U}_T + \frac{F_T - K_T \cdot U_{0T} - \alpha t^{n_0}}{(n_0+2)t^{n_0+1}} \\ & + \frac{\mu \delta_{n_0}^{n_1} |\beta|}{(n_0+2)t} \cdot \frac{\gamma}{|\gamma|} - \frac{\mu}{n_0+2} \left| \frac{F_N - W \cdot U_{0T}}{t^{n_0+1}} - W \cdot \tilde{U}_T \right| \frac{\gamma + \tilde{V}_T}{|\gamma + \tilde{V}_T|}. \end{aligned}$$

Now, it is readily seen that the Cauchy problem:

- $\tilde{U}_T(0) = 0 \quad ; \quad \tilde{V}_T(0) = 0,$
- $\frac{d}{dt} \tilde{U}_T = -\frac{n_0+1}{t} \tilde{U}_T + (n_0+2)(\gamma + \tilde{V}_T),$
- $\frac{d}{dt} \tilde{V}_T = -\frac{n_0+1}{t} \tilde{V}_T - \frac{1}{n_0+2} K_T \cdot \tilde{U}_T + \frac{F_T - K_T \cdot U_{0T} - \alpha t^{n_0}}{(n_0+2)t^{n_0+1}} \\ + \frac{\mu \delta_{n_0}^{n_1} |\beta|}{(n_0+2)t} \cdot \frac{\gamma}{|\gamma|} - \frac{\mu}{n_0+2} \left| \frac{F_N - W \cdot U_{0T}}{t^{n_0+1}} - W \cdot \tilde{U}_T \right| \frac{\gamma + \tilde{V}_T}{|\gamma + \tilde{V}_T|},$

has a unique formal power series solution. Let sign equal -1 or $+1$ according to the sign of the first nonzero term in the formal power series expansion of:

$$F_N - W \cdot U_{0T} - t^{n_0+1} W \cdot \tilde{U}_T.$$

It is easily checked that, in the particular case $n_1 = n_0$, we have:

$$\text{sign} = \text{sgn}(\beta),$$

so that the function \tilde{G} defined by:

$$\tilde{G}(\tilde{U}_T, \tilde{V}_T, t) = \frac{F_T - K_T \cdot U_{0T} - \alpha t^{n_0}}{(n_0+2)t^{n_0+1}} + \frac{\mu \delta_{n_0}^{n_1} |\beta|}{(n_0+2)t} \cdot \frac{\gamma}{|\gamma|} - \frac{\mu \text{sign}}{n_0+2} \left[\frac{F_N - W \cdot U_{0T}}{t^{n_0+1}} - W \cdot \tilde{U}_T \right] \frac{\gamma + \tilde{V}_T}{|\gamma + \tilde{V}_T|},$$

is analytic on some neighbourhood of $(0, 0, 0)$. Then, Lemma 3.4 provides a local analytic solution $(\tilde{U}_T, \tilde{V}_T)$ of the problem:

- $\tilde{U}_T(0) = 0 \quad ; \quad \tilde{V}_T(0) = 0,$
- $\frac{d}{dt} \tilde{U}_T = -\frac{n_0+1}{t} \tilde{U}_T + (n_0+2)(\gamma + \tilde{V}_T),$
- $\frac{d}{dt} \tilde{V}_T = -\frac{n_0+1}{t} \tilde{V}_T - \frac{1}{n_0+2} K_T \cdot \tilde{U}_T + \tilde{G}(\tilde{U}_T, \tilde{V}_T, t).$

Setting:

$$U_T(t) = U_{0T} + t^{n_0+1} \tilde{U}_T(t),$$

the function U_T is analytic on a right-neighbourhood of 0 and:

$$\dot{U}_T(t) = (n_0+2)t^{n_0+1}(\gamma + \tilde{V}_T(t)).$$

Rewinding the argument, it is readily seen that U_T is a solution of problem (7) and therefore, of the evolution problem of Proposition 3.3. \square

4. THE UNILATERAL PROBLEM WITH ANALYTIC FORCE

4.1. Existence of a local analytic solution

The result announced in the title of this section is the following.

Theorem 4.1. *Let $F : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ be an analytic function. Then, there exist $T_a > 0$ and analytic functions $U_a : [0, T_a[\rightarrow \mathbb{R}^n$ and $R_{aN} : [0, T_a[\rightarrow \mathbb{R}$, solution of the problem:*

- $U_a(0) = U_0 \quad ; \quad \dot{U}_a(0) = V_0,$
- $\ddot{U}_{aN} + k_N U_{aN} + W \cdot U_{aT} = F_N + R_{aN}, \quad \text{in } [0, T_a[,$
- $\ddot{U}_{aT} + K_T \cdot U_{aT} + W U_{aN} - F_T \in \partial S_{-\mu R_{aN}, B}[-\dot{U}_{aT}], \quad \text{in } [0, T_a[,$
- $U_{aN} \leq 0, \quad R_{aN} \leq 0, \quad U_{aN} R_{aN} \equiv 0.$

Moreover, any other analytic solution of this evolution problem is, either a restriction, or an analytic extension of this solution.

Proof. If we do not have $U_{0N} = V_{0N} = 0$, Theorem 4.1 is obvious, so we concentrate on the case $U_{0N} = V_{0N} = 0$. Denoting by:

$$F(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i t^i$$

the power series expansion of F at $t = 0$, we shall look for a formal power series solution given by:

$$U_a = \sum_{i=2}^{\infty} u_i t^i, \quad R_{aN} = \sum_{i=0}^{\infty} r_i t^i.$$

The first terms of these two formal series must satisfy:

- $2u_{2N} = f_{0N} + r_0,$
- $u_{2N} \leq 0, \quad r_0 \leq 0, \quad u_{2N} r_0 = 0.$

This system determines uniquely the couple (u_{2N}, r_0) . If this couple does not vanish, we stop. Otherwise, we continue the induction until, perhaps, a couple $(u_{(i+2)N}, r_i)$ becomes distinct from $(0, 0)$. At rank i , the problem to be solved is:

- $i(i+1)u_{(i+1)T} + K_T u_{(i-1)T} + W u_{(i-1)N} = f_{(i-1)T},$
- $(i+1)(i+2)u_{(i+2)N} + k_N u_{iN} + W \cdot u_{iT} = f_i + r_i,$
- $u_{(i+2)N} \leq 0, \quad r_i \leq 0, \quad u_{(i+2)N} r_i = 0.$

The two following cases have to be considered.

Case 1. The induction does not stop because all the couples $(u_{(i+2)N}, r_i)$ vanish.

Then, Theorem 1, p. 214 of [3] provides an analytic solution $u_a : [0, T_a[\rightarrow \mathbb{R}^n$ of the problem:

- $U_a(0) = U_0 \quad ; \quad \dot{U}_a(0) = V_0,$
- $\ddot{U}_a + K \cdot U_a = F, \quad \text{in } [0, T_a[.$

This solution, associated with the choice $R_{aN} \equiv 0$ provides the sought analytic solution of the evolution problem under consideration.

Case 2. The induction stops at rank n_0 because $u_{(n_0+2)N} < 0$.

Then, Theorem 1, p. 214 of [3] provides an analytic solution $U_a : [0, T_a[\rightarrow \mathbb{R}^n$ of the problem:

- $U_a(0) = U_0$; $\dot{U}_a(0) = V_0$,
- $\ddot{U}_a + K \cdot U_a = F$, in $[0, T_a[$.

Restricting, if necessary, the time interval on which U_a is defined, we have:

$$\forall t \in]0, T_a[, \quad U_{aN}(t) < 0,$$

and this solution, associated with the choice $R_{aN} \equiv 0$ provides the sought analytic solution of the evolution problem under consideration.

Case 3. The induction stops at rank n_0 because $r_{n_0} < 0$.

Propositions 3.3 and 3.5 provide an analytic solution $U_{aT} : [0, T_a[\rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ of the problem:

- $U_{aT}(0) = 0$; $\dot{U}_{aT}(0) = 0$,
- $\ddot{U}_{aT}(t) + K_T \cdot U_{aT}(t) - F_T(t) \in \partial S_{\mu|F_N(t)-W \cdot U_{aT}(t)|.B}[-\dot{U}_{aT}(t)]$, $\forall t \in [0, T_a[$.

Restricting, if necessary, the time interval on which U_{aT} is defined, we have:

$$\forall t \in]0, T_a[, \quad W \cdot U_{aT}(t) - F_N(t) < 0,$$

and this function, associated with the choices:

$$U_{aN} \equiv 0, \quad R_{aN} \equiv W \cdot U_{aT} - F_N,$$

provides the sought analytic solution of the evolution problem under consideration.

The uniqueness part of the theorem comes from the fact that the induction (finite or infinite) determines the status (active contact or not) of the system on a right-neighbourhood of $t = 0$, and uniqueness at fixed status holds either by virtue of Theorem 1, p. 214 of [3], or by virtue of Propositions 3.3 and 3.5. \square

4.2. Local uniqueness for the unilateral problem with analytic force

The result announced in the title of this section is the following.

Theorem 4.2. *Let $F : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ be an analytic function, $U_a : [0, T_a[\rightarrow \mathbb{R}^n$, the local analytic solution of problem \mathcal{P}_u provided by theorem 4.1 and $U \in \text{MMA}([0, T]; \mathbb{R}^n)$, an arbitrary solution of problem \mathcal{P}_u . Then, U_a and U are identically equal on some right-neighbourhood of $t = 0$:*

$$\exists T' \leq T_a, \quad \forall t \in [0, T'[, \quad U_a(t) = U(t).$$

Proof.

Step 1. *For all $t \in [0, T_a[$, the following estimate holds:*

$$|\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}|(t) + |U_T - U_{aT}|(t) \leq C_1 \int_{[0,t]} |R_N - R_{aN}| + C_2 \int_0^t |U_N - U_{aN}|,$$

for some real constants C_1 and C_2 depending only on K and μ .

We start with:

$$\ddot{U}_T - \ddot{U}_{aT} + K_T \cdot (U_T - U_{aT}) + (U_N - U_{aN}) W = R_T - R_{aT}.$$

We multiply by $\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}$ and integrate over $[0, t]$. The Coulomb friction law gives:

$$\begin{aligned} \int_{[0,t]} (R_T - R_{aT}) \cdot (\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}) &\leq \mu \int_{[0,t]} (R_N - R_{aN}) (|\dot{U}_T^+| - |\dot{U}_{aT}|), \\ &\leq \mu \int_{[0,t]} |R_N - R_{aN}| |\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}|. \end{aligned}$$

Moreover:

$$\int_{[0,t]} \ddot{U}_T \cdot \dot{U}_T^+ \geq \frac{1}{2} |\dot{U}_T^+|^2(t) - \frac{1}{2} |V_{0T}|^2,$$

(by use of [9], p. 44), which leads to:

$$\int_{[0,t]} (\ddot{U}_T - \ddot{U}_{aT}) \cdot (\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}) \geq \frac{1}{2} |\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}|^2(t).$$

Putting everything together, we get, for all $t \in [0, T_a]$:

$$\frac{1}{2} |\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}|^2(t) + \frac{1}{2} |U_T - U_{aT}|_{K_T}^2(t) \leq \mu \int_{[0,t]} |R_N - R_{aN}| |\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}| + |W| \int_0^t |U_N - U_{aN}| |\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}|.$$

Then, Lemma A.5, p.157 of [2] gives the estimate we looked for:

$$|\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}|(t) + |U_T - U_{aT}|_{K_T}(t) \leq \mu\sqrt{2} \int_{[0,t]} |R_N - R_{aN}| + |W|\sqrt{2} \int_0^t |U_N - U_{aN}|.$$

Step 2. For all $t \in [0, T_a]$, the following estimate holds:

$$|\dot{U}_N^+ - \dot{U}_{aN}|(t) + |U_N - U_{aN}|(t) \leq C_3 \int_0^t |U_T - U_{aT}| + C_4 \int_0^t |R_{aN}|,$$

for some real constants C_3 et C_4 depending only on K .

We start with:

$$\ddot{U}_N - \ddot{U}_{aN} + k_N(U_N - U_{aN}) + W \cdot (U_T - U_{aT}) = R_N - R_{aN}.$$

We multiply by $(\dot{U}_N^+ + \dot{U}_N^-)/2 - \dot{U}_{aN}$ and integrate over $[0, t]$. We get:

$$\frac{1}{2} |\dot{U}_N^+ - \dot{U}_{aN}|^2(t) + \frac{k_N}{2} |U_N - U_{aN}|^2(t) = \int_{[0,t]} (R_N - R_{aN}) ((\dot{U}_N^+ + \dot{U}_N^-)/2 - \dot{U}_{aN}) - \int_0^t (\dot{U}_N^+ - \dot{U}_{aN}) W \cdot (U_T - U_{aT}). \quad (9)$$

But, note the two following remarks.

(1) Restricting, if necessary, the time interval we work on:

$$R_N \dot{U}_{aN} \geq 0,$$

because, if $U_{0N} < 0$, then R_N must vanish on a right neighbourhood of $t = 0$, and, if $U_{0N} = 0$, then the nonpositive analytic function U_{aN} must be nonincreasing on a right neighbourhood of $t = 0$.

(2) The measure defined by:

$$R_N(\dot{U}_N^+ + \dot{U}_N^-) \leq 0,$$

is nonpositive. Indeed, let D be the countable subset of $[0, T]$ of those instants t at which the normal velocity is discontinuous: $\dot{U}_N^+(t) \neq \dot{U}_N^-(t)$. On $[0, T] \setminus D$, the measure $R_N(\dot{U}_N^+ + \dot{U}_N^-)$ equals $R_N \dot{U}_N^-$

which is nonpositive, thanks to the unilateral contact condition (actually, the measure $R_N \dot{U}_N^-$ vanishes identically on $[0, T] \setminus D$). Moreover, at each instant $t \in D$, the measure $R_N(\dot{U}_N^+ + \dot{U}_N^-)$ has an atom given by:

$$|\dot{U}_N^+|^2 - |\dot{U}_N^-|^2 = (e^2 - 1)|\dot{U}_N^-|^2 \leq 0,$$

thanks to the equation of motion and the impact law.

Taking these two remarks into account in (9), we obtain:

$$\int_{[0,t]} (R_N - R_{aN}) ((\dot{U}_N^+ + \dot{U}_N^-)/2 - \dot{U}_{aN}) \leq - \int_0^t R_{aN} (\dot{U}_N^+ - \dot{U}_{aN}),$$

and then:

$$\frac{1}{2} |\dot{U}_N^+ - \dot{U}_{aN}|^2(t) + \frac{k_N}{2} |U_N - U_{aN}|^2(t) \leq |W| \int_0^t |U_T - U_{aT}| |\dot{U}_N^+ - \dot{U}_{aN}| + \int_0^t |R_{aN}| |\dot{U}_N^+ - \dot{U}_{aN}|.$$

Lemma A.5, p.157 of [2] allows us to obtain the desired estimate:

$$|\dot{U}_N^+ - \dot{U}_{aN}|(t) + |U_N - U_{aN}|(t) \leq \frac{k_N + 1}{k_N} |W| \sqrt{2} \int_0^t |U_T - U_{aT}| + \frac{k_N + 1}{k_N} \sqrt{2} \int_0^t |R_{aN}|.$$

Step 3. For all $t \in [0, T_a[$, the following estimate holds:

$$\int_{[0,t]} |R_N - R_{aN}| \leq |\dot{U}_N^+ - \dot{U}_{aN}|(t) + C_5 \int_0^t |U_N - U_{aN}| + C_6 \int_0^t |U_T - U_{aT}| + 2 \int_0^t |R_{aN}|,$$

for some real constants C_5 and C_6 depending only on K .

Since R_N is a nonpositive measure:

$$\int_{[0,t]} |R_N - R_{aN}| \leq - \int_{[0,t]} R_N + \int_0^t |R_{aN}|.$$

Also, we have:

$$\begin{aligned} - \int_{[0,t]} R_N &= - \int_{[0,t]} (\ddot{U}_N - \ddot{U}_{aN}) - \int_0^t k_N (U_N - U_{aN}) + W \cdot (U_T - U_{aT}) + R_{aN}, \\ &\leq |\dot{U}_N^+ - \dot{U}_{aN}|(t) + k_N \int_0^t |U_N - U_{aN}| + |W| \int_0^t |U_T - U_{aT}| + \int_0^t |R_{aN}|. \end{aligned}$$

Putting everything together, we get the estimate that we looked for, with $C_5 = k_N$ and $C_6 = |W|$.

Step 4. For all $t \in [0, T_a[$, the following estimate holds:

$$|\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}|(t) + |U_T - U_{aT}|(t) \leq C \int_0^t |R_{aN}|,$$

for some real constant C depending only on K , μ and T_a .

Putting together steps 1, 2 and 3, the function :

$$\phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} |\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}|(t) + |U_T - U_{aT}|(t)$$

satisfies the estimate:

$$\phi(t) \leq C_7 \int_0^t \phi + C_8 \int_0^t |R_{aN}|,$$

for some real constants C_7 et C_8 depending only on K , μ and T_a . By Gronwall's lemma, we get:

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq C_8 \int_0^t |R_{aN}| + C_7 C_8 \int_0^t e^{C_7(t-s)} \int_0^s |R_{aN}|, \\ &\leq C_8 (1 + C_7 T_a e^{C_7 T_a}) \int_0^t |R_{aN}| \end{aligned}$$

which is the estimate that we sought.

Step 5. Conclusion.

The function R_{aN} being analytic, only the two following cases are possible.

- (1) $R_{aN} \equiv 0$. In such a case, step 4 gives $U_T \equiv U_{aT}$ and step 2, $U_N \equiv U_{aN}$. The sought conclusion holds true.
- (2) $\forall t \in]0, T_a[$, $R_{aN}(t) < 0$. Then, the function U_{aN} vanishes identically. Since the uniqueness of solution has already been proved for the bilateral problem, it is enough to prove $U_N \equiv 0$ to reach the desired conclusion. So, let us concentrate on this goal. Taking T_a smaller, if necessary, we have:

$$\forall t \in]0, T_a[, \quad -R_{aN}(t) - C|W| \int_0^t |R_{aN}| > 0.$$

Multiplying the equation:

$$\ddot{U}_N + k_N U_N = R_N - R_{aN} - W \cdot (U_T - U_{aT}),$$

by $(\dot{U}_N^+ + \dot{U}_N^-)/2$ and integrating over $[0, t]$, we obtain:

$$\frac{1}{2} |\dot{U}_N^+|^2(t) + \frac{k_N}{2} |U_N|^2(t) = \int_{[0,t]} R_N \frac{\dot{U}_N^+ + \dot{U}_N^-}{2} - \int_0^t (R_{aN} + W \cdot (U_T - U_{aT})) \dot{U}_N^+.$$

Since $R_N(\dot{U}_N^+ + \dot{U}_N^-)$ is a nonpositive measure, we have:

$$\int_0^t (R_{aN} + W \cdot (U_T - U_{aT})) \dot{U}_N^+ \leq 0.$$

Applying an integration by parts, we get:

$$(R_{aN} + W \cdot (U_T - U_{aT})) U_N \leq \int_0^t (\dot{R}_{aN} + W \cdot (\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT})) U_N,$$

and, therefore, by step 4:

$$0 \leq \left\{ |R_{aN}|(t) - C|W| \int_0^t |R_{aN}| \right\} |U_N|(t) \leq \int_0^t \left\{ |\dot{R}_{aN}|(s) + C|W| \int_0^s |R_{aN}| \right\} |U_N|(s).$$

Denoting by $m \in \mathbb{N}$ the order of the first nonzero term in the power series expansion at 0 of the analytic function R_{aN} , we get the estimate:

$$\forall t \in]0, T_a[, \quad |\dot{R}_{aN}|(t) \leq \frac{m + \bar{D}t}{t} |R_{aN}|(t),$$

for some nonnegative real constant \tilde{D} . We deduce that the following estimate holds:

$$\forall t \in]0, T_a[, \quad \left| \dot{R}_{aN}(t) + C|W| \int_0^t |R_{aN}| \right| \leq \frac{m + Dt}{t} \left| R_{aN}(t) - C|W| \int_0^t |R_{aN}| \right|,$$

for some nonnegative real constant D . Substituting this estimate into the previous inequality, we get:

$$t\psi(t) \leq (m + Dt) \int_0^t \psi.$$

where we have set:

$$\psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ |R_{aN}(t) - C|W| \int_0^t |R_{aN}| \right\} \frac{|U_N|(t)}{t},$$

which is a continuous function, even at $t = 0$ (more precisely $\psi(t) = o(t^m)$ when $t \rightarrow 0$). Then, we see that:

$$\forall t \in]0, T_a[, \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{e^{-Dt}}{t^m} \int_0^t \psi \right\} \leq 0,$$

which implies that this nonnegative function which vanishes at $t = 0$ is nonincreasing. Therefore:

$$\psi \equiv 0,$$

and, then:

$$U_N \equiv 0,$$

which is nothing but the desired conclusion. \square

4.3. Well-posedness of the unilateral problem with analytic force

Corollary 4.3. *If $F : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ is analytic (or piecewise analytic), then, problem \mathcal{P}_u admits a unique solution in $MMA([0, T]; \mathbb{R}^n)$.*

Proof. Using the local existence of solution for problem \mathcal{P}_u provided by Theorem 4.1, and the local uniqueness in MMA , provided by Theorem 4.2, we get a maximal solution U which is defined either on a subinterval $[0, \eta[$, for some $\eta \in]0, T]$, or on $[0, T]$. We have to prove that it is defined on $[0, T]$. To reach this conclusion, it is enough to prove that, if the maximal solution were defined only on a subinterval $[0, \eta[$, then, the total variation of the right-velocity \dot{U}^+ over $[0, \eta[$ is finite, for, in such a case, it would be possible to extend U beyond $[0, \eta[$ and obtain a contradiction. So, suppose that the maximal solution is only defined on $[0, \eta[$.

First, we have already noticed that $R_N(\dot{U}_N^+ + \dot{U}_N^-)$ is a nonpositive measure, thanks to the contact condition, the equation of motion and the impact law. Also, by the Coulomb friction law, $R_T \cdot \dot{U}_T^+$ is a nonpositive measure. Let D be the countable subset of those instants $t \in [0, \eta[$ at which the tangential velocity is discontinuous: $\dot{U}_T^+(t) \neq \dot{U}_T^-(t)$. On $[0, \eta[\setminus D$, the measure $R_T \cdot (\dot{U}_T^+ + \dot{U}_T^-)$ equals $R_T \cdot \dot{U}_T^+$ which is nonpositive. At each instant $t \in D$, making use of the equation of motion together with the Coulomb friction law, it is readily checked that the measure $R_T \cdot (\dot{U}_T^+ + \dot{U}_T^-)$ has a negative atom. Finally, $R \cdot (\dot{U}^+ + \dot{U}^-)$ is a nonnegative measure. So, multiplying the equation of motion:

$$\ddot{U} + K \cdot U = F + R,$$

by $(\dot{U}^+ + \dot{U}^-)/2$, and integrating over $]0, t]$ ($t \in]0, \eta[$), we get the energy inequality:

$$\frac{1}{2} |\dot{U}^+|^2(t) + \frac{1}{2} |U|_K^2(t) \leq \frac{1}{2} |V_0|^2 + \frac{1}{2} |U_0|_K^2 + \int_0^t F \cdot \dot{U}^+.$$

Applying Lemma A.5, p.157 of [2]:

$$|\dot{U}^+(t)| \leq |U_0|_K + |V_0| + \int_0^T |F|,$$

we find that the right-velocity \dot{U}^+ is bounded over the interval $[0, \eta[$. Next, integrating the first component of the equation of motion over $[0, t]$ ($t \in]0, \eta[$), we get:

$$\int_{[0,t]} R_N = \dot{U}_N^+(t) - V_{0N} + \int_0^t (k_N U_N + W \cdot U_T) - \int_0^t F_N,$$

which, since the right-velocity \dot{U}^+ is bounded over $[0, \eta[$ and since R_N is a nonpositive measure, shows:

$$\int_{[0,\eta]} |R_N| < \infty.$$

But, Coulomb friction law implies:

$$|R_T| \leq \mu |R_N|,$$

and therefore:

$$\int_{[0,\eta]} |R| < \infty.$$

Coming back to the equation of motion, we obtain:

$$\int_{[0,\eta]} |\ddot{U}| < \infty,$$

which is the desired conclusion. \square

We are thankful to Alain LÉGER for valuable discussions and constant support during this work.

REFERENCES

- [1] P. BALLARD, The dynamics of discrete mechanical systems with perfect unilateral constraints, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **154** (2000), pp 199–274.
- [2] H. BREZIS, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland Publishing Company, (1973).
- [3] H. CARTAN, *Théorie Élémentaire des Fonctions Analytiques d'une ou plusieurs Variables Complexes*, Hermann, Paris, (1961).
- [4] A. KLARBRING, *Ingenieur-Archiv* **60** (1990), pp 529–541.
- [5] M.D.P. MONTEIRO MARQUES, *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, (1993).
- [6] J.J. MOREAU, Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints, in *Unilateral problems in structural analysis* (G. Del Piero and F. Maceri Eds, Springer-Verlag, Wien–New-York, 1983), pp 173–221.
- [7] J.J. MOREAU, Dynamique de systèmes liaisons unilatérales avec frottement sec éventuel : essais numériques, *Note Technique* No 85-1 (1985), LMGMCM, Montpellier.
- [8] J.J. MOREAU, Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics, in *Nonsmooth Mechanics and Applications*, CISM Courses and Lectures No 302 (J.J. Moreau and P.D. Panagiotopoulos Eds, 1988), Springer-Verlag, Wien–New-York, pp 1–82.
- [9] J.J. MOREAU, Bounded variation in time, in *Topics in Non-smooth Mechanics* (J.J. Moreau, P.D. Panagiotopoulos, G. Strang, Eds., Birkhäuser Verlag, Basel–Boston–Berlin, 1988), pp 1–74.
- [10] D. PERCIVALE, Uniqueness in the Elastic Bounce Problem, I, *Journal of Differential Equations*, **56** (1985), pp 206–215.
- [11] M. SCHATZMAN, A Class of Nonlinear Differential Equations of Second Order in Time, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, **2**, No 2 (1978), pp 355–373.
- [12] M. SCHATZMAN, Uniqueness and continuous dependence on data for one dimensional impact problems, *Mathematical and Computational Modelling*, **28**, No. 4–8 (1998), pp 1–18.

III.5 Conséquences

Considérons le problème \mathcal{P}_u dans le cas particulier de la loi d'impact complètement inélastique $e = 0$.

- Si $\underline{F} \in L^1$, on a vu au chapitre II que l'on peut extraire de la suite des approximations fournies par l'algorithme "NSCD" une sous-suite convergeant uniformément vers une limite fournissant une solution au problème \mathcal{P}_u .
- Si maintenant \underline{F} est, en outre, supposée analytique par morceaux, le problème \mathcal{P}_u admet une unique solution dans MMA .

La conséquence de ces deux résultats est que, lorsque \underline{F} est analytique par morceaux, la suite des approximations fournies par l'algorithme converge uniformément (sans qu'il ne soit nécessaire d'extraire de sous-suite) vers l'unique solution, dans MMA , du problème \mathcal{P}_u . Ce fait constitue la justification théorique de l'utilisation de l'algorithme pour calculer une solution approchée au problème \mathcal{P}_u .

Chapitre IV

STABILITÉ DES SOLUTIONS D'ÉQUILIBRE

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, on étudie la stabilité des solutions d'équilibre pour le système masse ressort avec contact unilatéral et frottement de Coulomb présenté figure I.1 dans le cas $e = 0$. Dans un premier temps, on explore l'ensemble des solutions d'équilibre dans le cas où la donnée est une force constante. Dans un deuxième temps, on étudie leur stabilité, ce que l'on fait d'abord en n'utilisant que des notions classiques, c'est-à-dire en intégrant la dynamique à partir de données initiales hors d'équilibre. Cela est possible en toute rigueur comme conséquence des résultats d'existence et d'unicité précédents. Ensuite, on observe que les caractéristiques de la dynamique conduisent à introduire de nouvelles notions de stabilité avec lesquelles on montre que sous certaines hypothèses, la dynamique issue d'un état d'équilibre perturbé par une force dépendant du temps conduit à un nouvel état d'équilibre. Cela constitue un résultat qualitatif important de cette partie.

IV.1 Rappel du problème d'évolution dans \mathbb{R}^2

On se place en dimension 2 dans le cas du problème représenté figure I.1 et on choisit une loi d'impact complètement inélastique. L'évolution de ce système est décrite par les relations :

\mathcal{P}'_u : Trouver $\underline{U} \in MMA([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^2)$ et $\underline{R} \in \mathcal{M}([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^2)$ tels que :

$$\begin{aligned} \underline{U}(0) &= \underline{U}_0, \quad \dot{\underline{U}}^+(0) = \underline{V}_0, \\ m\ddot{\underline{U}} + \underline{K}\underline{U} &= \underline{F} + \underline{R}, \\ U_N &\leq 0, \quad R_N \leq 0, \quad U_N R_N = 0, \\ \forall V \in \mathcal{C}^0([0, \hat{T}]; \mathbb{R}), \quad \int_{[0, \hat{T}]} \langle R_T, V - \dot{U}_T^+ \rangle - \mu R_N (|V| - |\dot{U}_T^+|) &\geq 0, \\ U_N(t) = 0 &\implies \dot{U}_N^+(t) = 0. \end{aligned} \tag{IV.1}$$

Les résultats antérieurs donnent l'existence et l'unicité pour ce problème sur $[0, \hat{T}]$ pour une force \underline{F} analytique. Tout ce qui va suivre se passera dans l'intervalle $[0, \hat{T}]$ pour \hat{T} assez grand. La force extérieure \underline{F} étant choisie constante, le problème étudié admet une unique solution qui est analytique (cf chapitre III). Tous les coefficients de la matrice \underline{K} seront choisis positifs dans ce qui suit et $\det \underline{K} > 0$.

IV.2 Exploration des états d'équilibre

On établit tout d'abord la proposition suivante :

Proposition IV.1

- Le problème dynamique (IV.1) admet toujours un état d'équilibre \underline{U}^{eq} .
Plus précisément, soit $A = K_T F_N - W F_T$:*
- *si $A < 0$: pour $\mu \leq K_T/W$, la solution d'équilibre décollée est unique ;
pour $\mu > K_T/W$, il existe deux solutions d'équilibre, une décollée et une en glissement imminent positif ;*
 - *si $A = 0$: pour $\mu < K_T/W$, il existe une unique solution d'équilibre en contact affleurant ;
pour $\mu = K_T/W$, il existe une infinité de solutions en glissement imminent ;
pour $\mu > K_T/W$, il existe une solution d'équilibre en contact affleurant ainsi qu'une infinité de solutions en contact bloqué ;*
 - *si $A > 0$, il existe une infinité de solutions en contact bloqué ainsi qu'une ou deux positions d'équilibre en glissement imminent.*

Preuve :

Un état d'équilibre du problème (IV.1) est solution du problème \mathcal{P}_s suivant :

\mathcal{P}_s : Trouver $(\underline{U}, \underline{R}) \in (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tels que :

$$\underline{K} \underline{U} = \underline{F} + \underline{R},$$

$$U_N \leq 0, \quad R_N \leq 0, \quad U_N R_N = 0,$$

$$|R_T| \leq \mu |R_N|.$$

On observe tout d'abord que puisque le système est constitué d'un seul point et que l'on cherche des états d'équilibre sous force constante, on peut étudier séparément l'existence de solutions avec contact ou sans contact. On a tout de suite une condition d'existence de solutions sans contact. Si la masse ne touche pas le plan horizontal, c'est-à-dire U_N strictement négatif, on a en effet :

$$\begin{cases} U_N = \frac{A}{\det \underline{K}}, \\ U_T = \frac{K_N \overline{F}_T - W \overline{F}_N}{\det \underline{K}}, \\ R_N = R_T = 0, \end{cases}$$

où A est une quantité qui ne dépend que des données et s'exprime $A = K_T \overline{F}_N - W \overline{F}_T$. $\det \underline{K}$ représente le déterminant de la matrice \underline{K} strictement positif par hypothèse.

On cherche des solutions sans contact. De telles solutions n'existent donc que si les données sont telles que A est strictement négatif.

A présent, on cherche des états d'équilibre en contact avec l'obstacle, c'est-à-dire tels que $U_N \equiv 0$. Le problème \mathcal{P}_s se réduit alors à :

$$\begin{cases} W U_T = F_N + R_N, \\ K_T U_T = F_T + R_T, \\ U_N \equiv 0, \\ |R_T| \leq \mu |R_N|, \end{cases}$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{cases} R_T = \frac{A}{W} + \frac{K_T}{W} R_N, \\ |R_T| \leq \mu |R_N|. \end{cases}$$

Dans le plan $\{R_T, R_N\}$ les solutions d'équilibre avec contact se trouvent donc dans l'intersection de la droite $R_T = \frac{A}{W} + \frac{K_T}{W} R_N$ et du cône de Coulomb donné par $|R_T| \leq \mu |R_N|$.

Décrivons l'ensemble de ces solutions.

Les figures IV.1, IV.2, IV.3 qui suivent présentent les solutions d'équilibre du problème \mathcal{P}_s dans le plan $\{R_T, R_N\}$. Le cône de Coulomb est représenté en bleu ; le domaine admissible pour la réaction normale est délimité en vert ; la droite $R_T = \frac{A}{W} + \frac{K_T}{W} R_N$ est en rouge. L'ensemble des positions d'équilibre est donné par l'intersection de la droite rouge avec la

partie du cône de Coulomb délimitée par le domaine d'admissibilité de la réaction.

Pour les figures IV.1, la force extérieure et les paramètres de rigidité sont tels que la quantité A est strictement négative. Si le coefficient de frottement μ est inférieur ou égal à K_T/W , la droite rouge n'intersecte pas le domaine admissible des réactions. La masse ne touche pas l'obstacle, ce qui signifie que la solution sans contact est unique, et qu'il n'existe pas de solution avec contact.

Si la valeur de μ est strictement supérieure à K_T/W , le domaine admissible pour la réaction normale correspond à l'intervalle $[-\frac{A}{K_T - \mu W}, 0[$ et son intersection avec la droite rouge donne l'existence d'une seule solution en glissement imminent positif, en plus d'une solution sans contact.

Dans tous les autres cas qui suivent, il n'existe pas de solution sans contact.

On considère maintenant le cas où A est nul représenté figure IV.2. Si le coefficient de frottement est strictement inférieur à K_T/W , la droite rouge intersecte le domaine admissible des réactions $] -\infty, 0]$ exactement à la pointe du cône. Ainsi la pointe, position de glissement imminent avec une réaction nulle, est la seule solution du problème d'équilibre.

Si le coefficient μ est égal à K_T/W , tous les points situés sur le bord gauche du cône de Coulomb sont solutions puisque le domaine admissible de la réaction normale est $] -\infty, 0]$. Il existe donc une infinité de solutions en glissement imminent positif dont une pour laquelle la réaction est nulle.

Si le coefficient de frottement est supérieur à K_T/W , on obtient l'existence d'une infinité de solutions en contact bloqué et d'une unique position en glissement imminent sans réaction, puisque la droite passe encore par la pointe du cône.

On décrit enfin le cas où A est strictement positif. La particularité est qu'alors la droite rouge ne passe plus par la pointe du cône. Si le coefficient μ est strictement inférieur à K_T/W , le domaine admissible de la réaction normale correspond à l'intervalle $[-\frac{A}{K_T - \mu W}, -\frac{A}{K_T + \mu W}]$. L'intersection de cet intervalle avec la droite rouge donne une infinité de solutions en contact bloqué ainsi que deux positions en glissement imminent (positif et négatif).

Pour une valeur de μ égale à K_T/W , l'intervalle $] -\infty, -\frac{A}{K_T + \mu W}]$ représente le domaine admissible de la réaction normale. La demi-droite rouge correspond à l'ensemble des positions d'équilibre composé d'une infinité de positions en contact bloqué et d'une unique solution en glissement imminent négatif.

Enfin si le coefficient μ est strictement supérieur à K_T/W , la réaction normale doit appartenir à l'intervalle $] -\infty, -\frac{A}{K_T + \mu W}]$. La demi-droite rouge correspond aux solutions d'équilibre : il y a encore une infinité de positions d'équilibre en contact bloqué et une unique solution en glissement imminent négatif. \square

L'ensemble des positions d'équilibre dépend des paramètres de rigidité, du coefficient de frottement et des forces externes. Le tableau IV.1 résume ces résultats.

	$\mu < \frac{K_T}{W}$	$\mu = \frac{K_T}{W}$	$\mu > \frac{K_T}{W}$
$A < 0$	1 solution décollée	1 solution décollée	1 solution décollée + 1 solution en glissement imminent positif
$A = 0$	1 solution en contact affleurant	1 solution en contact affleurant + une infinité de solutions en glissement imminent positif	1 solution en contact affleurant + une infinité de solutions en contact bloqué
$A > 0$	2 solutions en glissement imminent positif et négatif + une infinité de solutions en contact bloqué	1 solution en glissement imminent négatif + une infinité de solutions en contact bloqué	1 solution en glissement imminent négatif + une infinité de solutions en contact bloqué

TAB. IV.1 – *Positions d'équilibre en fonction des paramètres A et μ .*

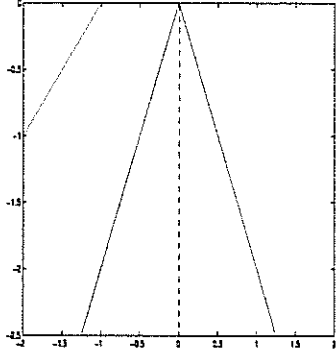
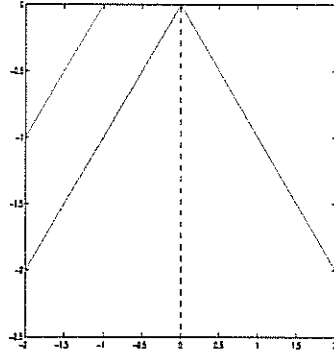
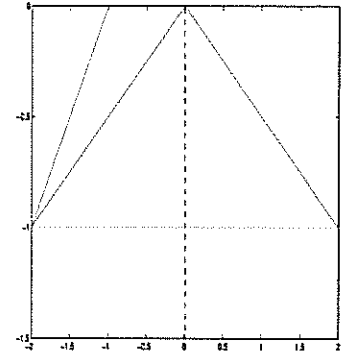

 (a) $\mu < K_T/W$

 (b) $\mu = K_T/W$

 (c) $\mu > K_T/W$

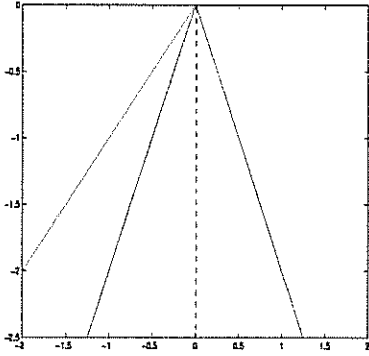
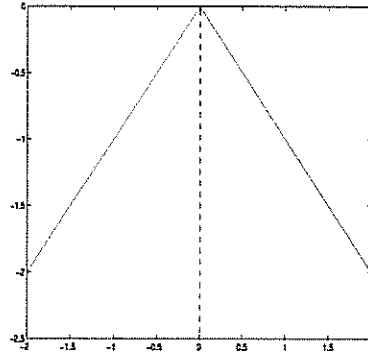
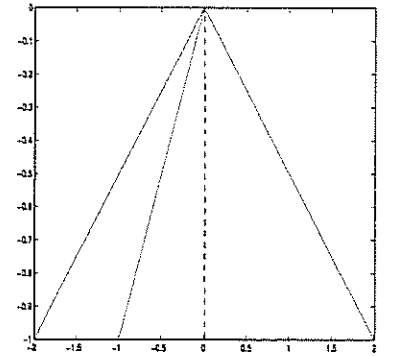
 FIG. IV.1 - $A = K_T F_N - W F_T < 0$

 (a) $\mu < K_T/W$

 (b) $\mu = K_T/W$

 (c) $\mu > K_T/W$

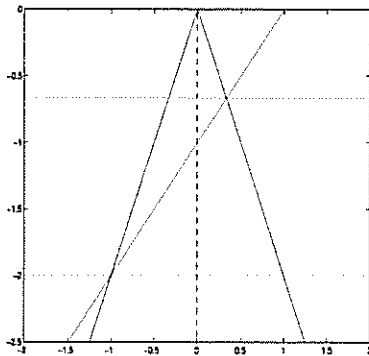
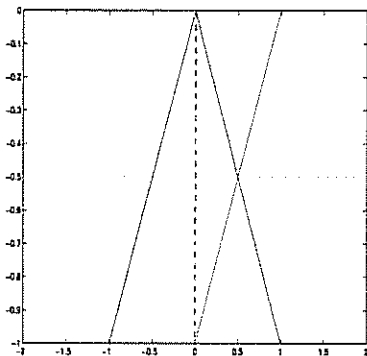
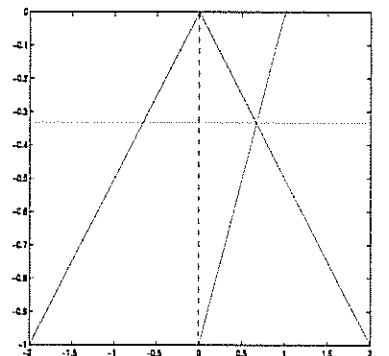
 FIG. IV.2 - $A = K_T F_N - W F_T = 0$

 (a) $\mu < K_T/W$

 (b) $\mu = K_T/W$

 (c) $\mu > K_T/W$

 FIG. IV.3 - $A = K_T F_N - W F_T > 0$

FIG. IV.4 - Ensembles de positions d'équilibre.

IV.3 Stabilité des états d'équilibre

IV.3.1 Introduction

On s'intéresse maintenant à la stabilité des états d'équilibre déterminés à la proposition IV.1. On étudie l'écart entre la position d'équilibre et la dynamique issue de données initiales voisines de cet état d'équilibre. Si on montre qu'il existe une donnée initiale perturbant l'équilibre, telle qu'après un temps fini ou asymptotiquement en temps, la dynamique diverge de l'équilibre, on conclut que l'équilibre est instable. Si on montre au contraire qu'aucune perturbation ne peut conduire à une divergence, on conclut à la stabilité, qui sera Lyapunov ou asymptotique.

L'obtention de ces résultats sera le plus fréquemment faite pour une étude directe de la dynamique continue. Ce qui est possible simplement puisque les données sont constantes. Ceci dit, il sera parfois plus simple d'utiliser les itérés successifs de l'algorithme "NonSmooth Contact Dynamics", "NSCD", considéré comme un système dynamique discret. Les résultats de convergence obtenus aux chapitres II et III permettent ensuite dans ces cas de passer à la limite sur la dynamique continue en temps.

Divers lemmes utiles pour la suite font d'abord l'objet du paragraphe suivant.

IV.3.2 Lemmes préliminaires

Remarque IV.1

Si l'on considère le système dynamique discrétisé en temps associé au problème continu on remarque successivement :

- 1.) qu'une perturbation en déplacement correspond au second itéré d'une perturbation en vitesse. On peut se limiter à l'étude de perturbations en vitesse ;*
- 2.) qu'une perturbation en vitesse ayant une composante normale et une composante tangentielle correspond au second itéré d'une perturbation dans l'une de ces directions. On pourra donc se limiter à des perturbations en vitesse normale ou tangentielle.*

Les lemmes qui suivent concernent des phases particulières de la dynamique. Ils constituent des résultats autonomes mais surtout simplifieront l'exposé ensuite.

Lemme IV.1

|| Soit $(\underline{U}^{eq}, \underline{R}^{eq})$, avec $U_N^{eq} = 0$ une position d'équilibre et $V_{0N} < 0$ une perturbation de cet équilibre en vitesse normale à $t = 0$. Alors, la solution du problème (IV.1) est telle qu'il existe un instant d'impact $t^{imp} > 0$, $t^{imp} \in]0, \hat{T}[$.

Preuve :

Une perturbation en vitesse normale compatible avec la liaison unilatérale à $t = 0$ est telle qu'il existe un intervalle à droite de l'origine pendant lequel la masse est constamment décollée. Durant cette phase de mouvement sans contact, l'évolution est décrite par les relations suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_N + K_N U_N + W U_T = F_N, \\ m\ddot{U}_T + W U_N + K_T U_T = F_T, \\ U_N(0) = 0, \quad U_T(0) = \frac{F_N + R_N^{eq}}{W}, \\ \dot{U}_N(0) = V_{0N}, \quad \dot{U}_T(0) = 0. \end{cases}$$

La solution de ce problème s'écrit :

$$\underline{U}(t) = (a_1 \cos(\alpha_1 t) + b_1 \sin(\alpha_1 t)) \underline{\phi}^1 + (a_2 \cos(\alpha_2 t) + b_2 \sin(\alpha_2 t)) \underline{\phi}^2 + \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{F}, \quad (\text{IV.2})$$

$\underline{\underline{K}}^{-1}$ désigne l'inverse de la matrice $\underline{\underline{K}}$.

avec

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{\frac{(K_N + K_T) + \sqrt{(K_N - K_T)^2 + 4W^2}}{2m}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{(K_N + K_T) - \sqrt{(K_N - K_T)^2 + 4W^2}}{2m}}, \\ \underline{\phi}^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{K_N - K_T + \sqrt{(K_N - K_T)^2 + 4W^2}}{2m} \end{pmatrix}, \quad \underline{\phi}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{K_N - K_T - \sqrt{(K_N - K_T)^2 + 4W^2}}{2m} \end{pmatrix}, \\ a_1 &= \frac{1}{\phi_T^1 - \phi_T^2} \left\{ \frac{A}{\det \underline{\underline{K}}} \left(\phi_T^2 + \frac{K_N}{W} \right) + \frac{R_N^{eq}}{W} \right\}, \quad a_2 = -\frac{1}{\phi_T^1 - \phi_T^2} \left\{ \frac{A}{\det \underline{\underline{K}}} \left(\phi_T^1 + \frac{K_N}{W} \right) + \frac{R_N^{eq}}{W} \right\}, \\ b_1 &= \frac{-V_{0N} \phi_T^2}{\alpha_1 (\phi_T^1 - \phi_T^2)}, \quad b_2 = \frac{V_{0N} \phi_T^1}{\alpha_2 (\phi_T^1 - \phi_T^2)}, \\ \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{F} &= \frac{1}{\det \underline{\underline{K}}} \begin{pmatrix} A \\ K_N F_T - W F_N \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dès que $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, U_N est une fonction périodique. En revanche, il faut prendre quelques précautions si $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \notin \mathbb{Q}$.

Soit $\tilde{U}_N(t)$ une fonction presque-périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui coïncide avec $U_N(t)$ sur $[0, +\infty[$. On rappelle qu'une fonction f est presque-périodique [4] si à tout intervalle $[\alpha, \alpha + I_\varepsilon]$, on peut faire correspondre un nombre de translation, τ contenu dans cet intervalle. En d'autres

termes dans tout intervalle I_ε , il existe un nombre τ tel que $|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon$. Les nombres τ sont appelés presque périodes de f attachées à ε .

$\tilde{U}_N(t)$ est évidemment continue et dérivable. Soit $\eta > 0$ suffisamment petit tel que $\tilde{U}_N(-\eta) > 0$ et $\tilde{U}_N(\eta) < 0$. On peut alors toujours choisir $\varepsilon > 0$ pour que $\tilde{U}_N(-\eta + \tau) > 0$ et $\tilde{U}_N(\eta + \tau) < 0$ où τ est une presque période de la fonction $\tilde{U}_N(t)$. $\tilde{U}_N(t)$ possède donc un zéro dans $]-\eta + \tau, \eta + \tau[$ qui est un instant d'impact pour U_N .

Il existe donc un instant t^{imp} quels que soient α_1, α_2 . Les résultats précédents sur le caractère bien posé de la dynamique montrent alors qu'on peut toujours choisir \hat{T} assez grand pour que t^{imp} appartienne à $]0, \hat{T}[$. \square

Lemme IV.2

Soit $(\underline{U}^{eq}, \underline{0})$ une position d'équilibre en contact affleurant et V_{0T} une perturbation de cet équilibre en vitesse tangentielle strictement positive à $t = 0$. Alors, la solution du problème (IV.1) est telle qu'il existe un instant d'impact $t^{imp} > 0$, $t^{imp} \in]0, \hat{T}[$.

Preuve :

On considère une position d'équilibre en contact affleurant caractérisée en déplacement par $\underline{U}^{eq} = (0, F_N/W)$ et en réaction par $\underline{R}^{eq} = 0$. On rappelle que ces positions d'équilibre existent seulement si la quantité A est identiquement nulle. A droite de l'origine, il existe un intervalle dans lequel la solution est soit en contact soit décollée. De manière intuitive, il semble que seules les perturbations en vitesse normale strictement négative à $t = 0$ sont telles qu'il existe un intervalle à droite de l'origine pendant lequel la masse est constamment décollée. Dans ce qui suit, on montre que l'existence d'un tel intervalle est également assurée pour des perturbations en vitesse tangentielle strictement positive à $t = 0$.

Le problème de mouvement sans contact pour une perturbation en vitesse tangentielle positive s'écrit :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_N + K_N U_N + W U_T = F_N, \\ m\ddot{U}_T + W U_N + K_T U_T = F_T, \\ U_N(0) = 0, \quad U_T(0) = \frac{F_N}{W}, \\ \dot{U}_N(0) = 0, \quad \dot{U}_T(0) = V_{0T} > 0. \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

On va montrer que la solution U_N de ce problème est strictement négative sur un intervalle à droite de l'origine.

La solution du problème (IV.3) s'écrit :

$$U_N(t) = \frac{V_{0T}}{\phi_T^1 - \phi_T^2} \left(\frac{\sin(\alpha_1 t)}{\alpha_1} - \frac{\sin(\alpha_2 t)}{\alpha_2} \right), \quad (\text{IV.4})$$

$$U_T(t) = \frac{V_{0T}}{\phi_T^1 - \phi_T^2} \left(\frac{\sin(\alpha_1 t)}{\alpha_1} \phi_T^1 - \frac{\sin(\alpha_2 t)}{\alpha_2} \phi_T^2 \right) + \frac{F_N}{W}, \quad (\text{IV.5})$$

les valeurs de $\underline{\phi}_1$, $\underline{\phi}_2$, α_1 et α_2 ayant été données au lemme IV.1.

Au voisinage de $t = 0$, l'expression du déplacement normal est donnée par :

$$U_N(t) = \frac{V_{0T}}{\phi_T^1 - \phi_T^2} \frac{(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}{6} t^3 + \mathcal{O}(t^5).$$

La quantité $\phi_T^1 - \phi_T^2$ étant positive et la quantité $\alpha_2^2 - \alpha_1^2$ étant négative, le déplacement normal est strictement négatif. Cela garantit l'existence d'un intervalle à droite de l'origine durant lequel la masse est décollée. La relation (IV.5) montre l'existence d'un instant d'impact t^{imp} caractérisé comme étant la plus petite racine positive de cette équation. Ce qui donne le résultat annoncé. \square

Corollaire IV.1

Supposons que dans une phase quelconque d'évolution, il existe un instant pour lequel la solution se trouve à la pointe du cône de Coulomb avec une vitesse tangentielle positive. Alors cet instant est suivi d'une phase de mouvement sans contact, elle même suivie d'un instant d'impact t^{imp} .

Preuve :

Si $A = 0$, le lemme IV.2 donne le résultat.

Si $A \neq 0$, étudions les itérés de "NSCD". La masse décolle si la quantité $(\dot{U}_N^{i+1})^{libre}$ est strictement négative. Par définition (paragraphe II.2, chapitre II) :

$$\begin{aligned} (\dot{U}_N^{i+1})^{libre} &= \frac{1}{\det \underline{\underline{M}}} \left\{ \left(m + \frac{h^2 K_T}{2} \right) \tilde{F}_N^{i+1} - \frac{h^2 W}{2} \tilde{F}_T^{i+1} \right\}, \\ &= \frac{1}{\det \underline{\underline{M}}} \left\{ \left(m + \frac{h^2 K_T}{2} \right) (-hWU_T^i + hF_N) - \frac{h^2 W}{2} (m\dot{U}_T^i - hK_T U_T^i + hF_T) \right\}. \end{aligned}$$

Supposons qu'à l'itéré i , la masse se trouve à la pointe du cône. Il en résulte :

$$(\dot{U}_N^{i+1})^{libre} = \frac{h^2}{2\det \underline{\underline{M}}} \left\{ -m\dot{U}_T^i - \frac{Ah}{W} \right\}.$$

Le signe de $(\dot{U}_N^{i+1})^{libre}$ dépend du signe de $-m\dot{U}_T^i$ qui est strictement négatif. Par conséquent, à partir de l'itéré $i + 1$, la particule est en mouvement sans contact.

De plus, la résolution du problème continu associé :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_N + K_N U_N + WU_T = F_N, \\ m\ddot{U}_T + WU_N + K_T U_T = F_T, \\ U_N(0) = 0, \quad U_T(0) = \frac{F_N}{W}, \\ \dot{U}_N(0) = 0, \quad \dot{U}_T(0) = V_{0T}, \end{cases}$$

implique :

$$U_N(t) = \frac{1}{\phi_T^1 - \phi_T^2} \frac{A}{\det \underline{\underline{K}}} \left\{ \left(\phi_T^2 + \frac{K_N}{W} \right) \cos(\alpha_1 t) - \left(\phi_T^1 + \frac{K_N}{W} \right) \cos(\alpha_2 t) \right\} \\ + \frac{\dot{U}_T(\bar{t})}{\phi_T^1 - \phi_T^2} \left\{ \frac{\sin(\alpha_1 t)}{\alpha_1} - \frac{\sin(\alpha_2 t)}{\alpha_2} \right\} + \frac{A}{\det \underline{\underline{K}}},$$

et permet de prouver qu'il existe un instant d'impact t^{imp} grâce à un argument identique à celui de la preuve du lemme IV.1. \square

Lemme IV.3

1.). Soit $A \geq 0$ avec $\mu > K_T/W$ si $A > 0$, μ quelconque si $A = 0$.

Soit V_{0N} une perturbation à $t = 0$ en vitesse normale négative de l'équilibre.

Soit $t^{imp} > 0$ un instant d'impact tel que $\dot{U}_T^-(t^{imp}) > 0$. Alors, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall V_{0N} \in]-\eta, 0[$, il existe $\hat{t} > t^{imp}$ avec $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ et $R_N(\hat{t}) < 0$.

2.). Soit $A = 0$ avec $\mu > K_T/W$.

Soit V_{0T} une perturbation à $t = 0$ en vitesse tangentielle positive de l'équilibre en contact affleurant.

Soit $t^{imp} > 0$ un instant d'impact tel que $\dot{U}_T^-(t^{imp}) > 0$. Alors, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall V_{0T} \in]0, \eta[$, il existe $\hat{t} > t^{imp}$ avec $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ et $R_N(\hat{t}) < 0$.

Preuve :

Pour toutes les valeurs des paramètres A et μ correspondant aux hypothèses du lemme IV.3, le raisonnement est identique. Pour la clarté du propos, on présente la preuve uniquement dans un cas. Pour les autres valeurs des paramètres, on donne uniquement le résultat.

On considère une position d'équilibre $(\underline{U}^{eq}, \underline{R}^{eq})$ caractérisée par $A = 0$ et $\mu > K_T/W$. Soit V_{0N} une perturbation strictement négative de la position d'équilibre. On étudie la dynamique du problème (IV.1) sur $[0, \hat{T}]$ pour \hat{T} assez grand. D'après le lemme IV.1, il existe un instant d'impact t^{imp} . L'évolution de la particule après l'instant d'impact dépend du signe de la vitesse tangentielle $\dot{U}_T(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})) = \frac{dU_T(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N}))}{dt}$ (que l'algorithme "NSCD" approche par la vitesse calculée du dernier pas de temps de mouvement sans contact, et qui est une approximation de $\dot{U}_T^-(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N}))$; U_T est défini par l'expression (IV.2)). Lorsque la vitesse tangentielle $\dot{U}_T^-(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N}))$ est strictement positive, la masse est en glissement positif. Durant cette phase de glissement, la réaction croît. En effet, la force extérieure étant choisie constante, durant la phase de glissement le système est régulier et correspond à une équation différentielle du second ordre. Ainsi, l'évolution de la réaction normale est donnée par :

$$\text{si } U_N(t) \equiv 0, \quad \frac{dR_N(t)}{dt} = W\dot{U}_T(t), \quad (\text{IV.8})$$

et dépend du signe de la vitesse tangentielle puisque le terme de couplage W est positif. La masse peut donc atteindre la pointe du cône de Coulomb puis décoller conformément

au lemme IV.2. On va montrer que la vitesse tangentielle s'annule avant que la particule atteigne la pointe du cône si la perturbation V_{0N} est suffisamment petite. Cette condition s'écrira sous la forme, en rappelant que $U_T = F_N/W$ caractérise la pointe du cône :

$$\exists \hat{t} > t^{imp} \text{ tel que } \dot{U}_T(\hat{t}) = 0 \text{ avec } U_T(\hat{t}) < \frac{F_N}{W}. \quad (\text{IV.10})$$

Conformément au résultat de régularité obtenu au chapitre III, la vitesse tangentielle est continue au moment de l'impact. Alors la phase de glissement positif est décrite par :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N, \\ U_T(0) = U_T(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})), \\ \dot{U}_T(0) = \dot{U}_T^-(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})). \end{cases}$$

La solution de ce problème est donnée par :

$$\begin{aligned} U_T(t) = & \frac{1}{2} \left\{ U_T(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})) + \dot{U}_T^-(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})) \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \right\} e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} t} \\ & + \frac{1}{2} \left\{ U_T(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})) - \dot{U}_T^-(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})) \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \right\} e^{-\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} t} \\ & + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}. \end{aligned}$$

Les conditions (IV.10) se traduisent donc par la condition :

$$U_T(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})) + \dot{U}_T^-(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})) \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} < 0. \quad (\text{IV.12})$$

Il ne reste plus qu'à établir l'existence du paramètre $\eta > 0$ tel que $\forall V_{0N} \in]-\eta, 0[$, la condition (IV.12) soit satisfaite.

Pour cela, on considère la fonction de V_{0N} définie par le membre de gauche de la relation (IV.12) et on montre que cette fonction admet un zéro.

Dans un premier temps, on suppose que la perturbation initiale V_{0N} négative est infinitésimale. Soit donc $V_{0N} = -\xi_1$, $\xi_1 > 0$.

L'expression du déplacement normal lors de la phase de mouvement sans contact est donnée par :

$$U_N(t) = \frac{R_N^{eq}}{W(\phi_T^1 - \phi_T^2)} \{ \cos(\alpha_1 t) - \cos(\alpha_2 t) \} + \frac{\xi_1}{(\phi_T^1 - \phi_T^2)} \left\{ \frac{\sin(\alpha_1 t) \phi_T^2}{\alpha_1} - \frac{\sin(\alpha_2 t) \phi_T^1}{\alpha_2} \right\}.$$

ξ_1 étant suffisamment petit, l'instant d'impact sera suffisamment proche de zéro et le mouvement sans contact sera donné par :

$$U_N(t) = \left\{ \frac{R_N^{eq}}{2W(\phi_T^1 - \phi_T^2)} (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)t - \xi_1 \right\} t + \mathcal{O}(t^3).$$

Par conséquent, la masse entre en contact à l'instant $t^{imp} = \frac{2W\xi_1(\phi_T^1 - \phi_T^2)}{R_N^{eq}(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}$.

On calcule facilement le membre de gauche de (IV.12) à cet instant t^{imp} :

$$\begin{aligned} U_T(\xi_1, t^{imp}(\xi_1)) + \dot{U}_T^-(\xi_1, t^{imp}(\xi_1)) \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \\ = -2 \frac{\alpha_1^2 \phi_T^1 - \alpha_2^2 \phi_T^2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} \xi_1 + \frac{R_N^{eq}}{W} + \mathcal{O}(\xi_1^2). \end{aligned}$$

ξ_1 étant supposé petit et la quantité $2 \frac{\alpha_1^2 \phi_T^1 - \alpha_2^2 \phi_T^2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}}$ étant finie, le signe de cette quantité dépend du signe de $\frac{R_N^{eq}}{W}$ qui est strictement négative.

On montre maintenant que pour $V_{0N} = -\xi_2$, $\xi_2 > 0$ assez grand la fonction définie par le membre de gauche de la relation (IV.12) est strictement positive.

$$\begin{aligned} U_T(\xi_2, t^{imp}(\xi_2)) + \dot{U}_T^-(\xi_2, t^{imp}(\xi_2)) \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \\ > U_T(\xi_2, t^{imp}(\xi_2)) - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \\ > \frac{R_N^{eq}}{W} - \frac{\xi_2 \phi_T^1 \phi_T^2}{\phi_T^1 - \phi_T^2} \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}. \end{aligned}$$

On constate alors que pour :

$$\xi_2 > \frac{(\phi_T^1 - \phi_T^2) \alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 - \alpha_2) \phi_T^1 \phi_T^2} \left\{ \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} - \frac{R_N^{eq}}{W} \right\},$$

la fonction définie par le membre de gauche de la relation (IV.12) est positive. Cette fonction étant continue, il existe $\eta \in]\xi_1, \xi_2[$ tel que pour tout $V_{0N} \in]-\eta, 0[$, la condition (IV.12) soit satisfaite.

Le raisonnement est tout à fait analogue lorsque A est strictement positif. Les conditions analogues à (IV.12) étant alors :

$$\begin{aligned}
 \text{si } \mu < \frac{K_T}{W}, \quad & \left(U_T(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})) - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \right)^2 + \sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}} \dot{U}_T^-(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N}))^2 \\
 & - \frac{A}{W(K_T - \mu W)} \dot{U}_T^-(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})) < 0, \\
 \text{si } \mu = \frac{K_T}{W}, \quad & \frac{mW}{2A} U_T(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N}))^2 + \dot{U}_T^-(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})) - \frac{F_N}{W} < 0, \\
 \text{si } \mu > \frac{K_T}{W}, \quad & U_T(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})) + \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} \dot{U}_T^-(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} < 0.
 \end{aligned}$$

La preuve du point 2.) est identique à la précédente. Le système décrivant le glissement positif après l'impact est dans ce cas :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N, \\ U_T(0) = U_T(V_{0T}, t^{imp}(V_{0T})), \\ \dot{U}_T(0) = \dot{U}_T^-(V_{0T}, t^{imp}(V_{0T})). \end{cases}$$

La solution de ce problème est donnée par :

$$\begin{aligned}
 U_T(t) = & \frac{1}{2} \left\{ U_T(V_{0T}, t^{imp}(V_{0T})) + \dot{U}_T^-(V_{0T}, t^{imp}(V_{0T})) \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \right\} e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} t} \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ U_T(V_{0T}, t^{imp}(V_{0T})) - \dot{U}_T^-(V_{0T}, t^{imp}(V_{0T})) \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \right\} e^{-\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} t} \\
 & + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W},
 \end{aligned}$$

et l'analogie de la condition (IV.8) s'écrit :

$$U_T(V_{0T}, t^{imp}(V_{0T})) + \dot{U}_T^-(V_{0T}, t^{imp}(V_{0T})) \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} < 0,$$

d'où l'on déduit comme précédemment l'existence d'un paramètre $\eta > 0$ tel que :

$$\forall V_{0T} \in]0, \eta[, \exists \hat{t} > t^{imp}, \text{ tel que } \begin{cases} \dot{U}_T(\hat{t}) = 0, \\ R_N(\hat{t}) < 0. \end{cases}$$

□

Lemme IV.4

- 1.) Soit $A \geq 0$ avec $\mu > K_T/W$ si $A = 0$, μ quelconque si $A > 0$.
 Soit V_{0T} une perturbation à $t = 0$ en vitesse tangentielle de l'état d'équilibre.
 Alors, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall V_{0T} < \eta$, il existe $\hat{t} > 0$ tel que $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ avec $R_N(\hat{t}) < 0$.
- 2.) Soit $A = 0$ avec $\mu = K_T/W$.
 Soit V_{0T} une perturbation à $t = 0$ en vitesse tangentielle négative de l'état d'équilibre en contact affleurant.
 Alors il existe $\hat{t} > 0$ tel que $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ avec $R_N(\hat{t}) < 0$.

Preuve :

On commence par établir le point 1.).

On considère une position d'équilibre $(\underline{U}^{eq}, \underline{R}^{eq})$. Les perturbations en vitesse tangentielle pour des solutions d'équilibre en contact non-affleurant conduisent à une situation de glissement. Dans le cas particulier de la solution d'équilibre en contact affleurant, les perturbations en vitesse tangentielle négative conduisent à un glissement alors que les perturbations en vitesse tangentielle positive conduisent à une phase de mouvement sans contact (lemme IV.2).

Dans un premier temps, supposons que la perturbation en vitesse tangentielle soit positive. S'il s'agit de la position d'équilibre en contact affleurant, le résultat est acquis d'après le point 2.) du lemme IV.3.

Sinon, d'après la relation (IV.6), la réaction normale croît. Par conséquent, la masse est susceptible d'atteindre la pointe du cône avec une vitesse positive puis de décoller (lemme IV.2, corollaire IV.1). On va montrer que si la perturbation V_{0T} n'est pas trop grande, la vitesse tangentielle s'annule avant que la particule n'atteigne la pointe du cône.

Durant la phase de glissement positif, le mouvement est solution de :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N, \\ U_T(0) = \frac{F_N}{W} + \frac{R_N^{eq}}{W}, \\ \dot{U}_T(0) = V_{0T} > 0. \end{cases} \quad (IV.9)$$

En fonction du coefficient de frottement, la solution de ce problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{si } \mu < \frac{K_T}{W}, \quad U_T(t) = & \left\{ \frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{R_N^{eq}}{W} \right\} \cos \left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} t \right) \\ & + V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}} \sin \left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} t \right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}, \end{aligned} \quad (IV.10)$$

$$\text{si } \mu = \frac{K_T}{W}, \quad U_T(t) = -\frac{A}{2mW}t^2 + V_{0T}t + \frac{F_N + R_N^{eq}}{W}, \quad (\text{IV.11})$$

$$\begin{aligned} \text{si } \mu > \frac{K_T}{W}, \quad U_T(t) = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{R_N^{eq}}{W} + V_{0T} \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} \right\} e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}t} \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{R_N^{eq}}{W} - V_{0T} \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} \right\} e^{-\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}t} \\ & + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}. \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Durant cette phase de glissement, le déplacement croît. La masse s'arrête de glisser avant d'atteindre la pointe du cône si la condition suivante est satisfaite :

$$\exists \hat{t} > 0 \text{ tel que } \dot{U}_T(\hat{t}) = 0 \text{ avec } U_T(\hat{t}) < \frac{F_N}{W}. \quad (\text{IV.13})$$

Les conditions (IV.13) se traduisent, en fonction de la valeur du coefficient de frottement, par les conditions ci-dessous :

$$\begin{aligned} 0 < V_{0T} < -\frac{R_N^{eq}}{W} \sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}, & \quad \text{si } \mu < \frac{K_T}{W}, \\ 0 < V_{0T} < \sqrt{\frac{-2AR_N^{eq}}{mW^2}}, & \quad \text{si } \mu = \frac{K_T}{W}, \\ 0 < V_{0T} < -\left(\frac{A}{(K_T - \mu W)W} + \frac{R_N^{eq}}{W} \right) \sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}, & \quad \text{si } \mu > \frac{K_T}{W}. \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

Les relations (IV.14) donnent donc explicitement la valeur de η tel que, si la perturbation $V_{0T} \in]0, \eta[$, la vitesse s'annule à l'instant \hat{t} avant d'atteindre la pointe du cône.

A présent, considérons une perturbation V_{0T} strictement négative. D'après la relation (IV.6), la réaction normale décroît. Le mouvement est décrit par le système :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T + \mu W)U_T = F_T + \mu F_N, \\ U_T(0) = \frac{F_N}{W} + \frac{R_N^{eq}}{W}, \\ \dot{U}_T(0) = V_{0T} < 0, \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\begin{aligned} U_T(t) = & \left(\frac{A}{W(K_T + \mu W)} + \frac{R_N^{eq}}{W} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}}t \right) \\ & + V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} \sin \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}}t \right) + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}. \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

La vitesse s'annule lorsque l'instant \hat{t} vérifie :

$$\cos \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} \hat{t} \right) = \left(\frac{A}{W(K_T + \mu W)} + \frac{R_N^{eq}}{W} \right) \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} \frac{1}{V_{0T}} \sin \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} \hat{t} \right),$$

et l'on a évidemment $R_N(\hat{t}) < 0$, pour tout $V_{0T} < 0$.

Le résultat du point 2.) s'obtient en menant un raisonnement analogue au cas des perturbations en vitesse tangentielle négative. \square

Lemme IV.5

- 1.) Soit $A \geq 0$ avec $\mu > K_T/W$ si $A = 0$, μ quelconque si $A > 0$.
Sous les hypothèses du point 1.) du lemme IV.4, on sait qu'il existe $\hat{t} > 0$ tel que $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ avec $U_N(\hat{t}) = 0$. Si il existe un état d'équilibre $(\tilde{U}^{eq}, \tilde{R}^{eq})$ tel que $R_N(\hat{t}) = \tilde{R}_N^{eq}$, alors $\forall t > \hat{t}$, $\dot{U}_T(t) \equiv 0$ et $\dot{U}_N(t) \equiv 0$.
- 2.) Soit $A = 0$ avec $\mu = K_T/W$. Sous les hypothèses du point 2.) du lemme IV.4, on sait qu'il existe $\hat{t} > 0$ tel que $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ avec $U_N(\hat{t}) = 0$. Alors $\forall t > \hat{t}$, $\dot{U}_T(t) \equiv 0$ et $\dot{U}_N(t) \equiv 0$.

Preuve :

Plutôt que d'étudier le système continu comme on l'a fait pour établir les lemmes précédents, il est plus facile ici d'étudier les itérés successifs de l'algorithme "NSCD". Le résultat découlera ensuite du résultat de convergence précédemment établi.

Supposons qu'il existe un instant de contact $\hat{t} > 0$ tel que $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ et notons i l'itéré tel que $\hat{t} \in [t_K^i, t_K^{i+1}]$, pour K assez grand. On souhaite montrer que si il existe un état d'équilibre $(\tilde{U}^{eq}, \tilde{R}^{eq})$ tel que $R_N(\hat{t}) = \tilde{R}_N^{eq}$, alors $\forall j > i$, $\dot{U}_{KT}^j \equiv 0$. Par la suite, pour simplifier les notations, on omet l'indice K .

Afin de montrer que pour tout $j > i$, $\dot{U}_T^j \equiv 0$ nous allons montrer qu'à partir de l'itéré $i + 1$, la masse entre dans la boucle de contact bloqué. L'algorithme présenté au chapitre II indique qu'on doit prouver que les relations suivantes

$$\tilde{F}_T^j - \mu \tilde{F}_N^j < 0, \quad (IV.16)$$

$$\tilde{F}_T^j + \mu \tilde{F}_N^j > 0, \quad (IV.17)$$

sont vérifiées simultanément pour tout $j > i$. Les grandeurs \tilde{F}_T^j et \tilde{F}_N^j étant définies au paragraphe II.3 du chapitre II.

Tout d'abord, on suppose qu'aux itérés précédant i , la masse glisse dans le sens positif. Comme à l'itéré $i + 1$ ce glissement cesse, d'après le tableau II.1, on a $\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} < 0$. Il reste alors à vérifier que la relation (IV.17) est satisfaite pour $j = i + 1$.

Par définition, on a

$$\begin{aligned}\tilde{F}_T^{i+1} + \mu\tilde{F}_N^{i+1} &= m\dot{U}_T^i - h\{(K_T + \mu W)U_T^i + (F_T + \mu F_N)\}, \\ &> -h\{(K_T + \mu W)U_T(\hat{t}) + (F_T + \mu F_N)\}, \\ &> -h\left\{(K_T + \mu W)\left(\frac{F_N}{W} + \frac{\tilde{R}_N^{eq}}{W}\right) + (F_T + \mu F_N)\right\}, \\ &> -h\left\{\frac{A}{W} + (K_T + \mu W)\frac{\tilde{R}_N^{eq}}{W}\right\}.\end{aligned}$$

Par conséquent, si $A = 0$, on a $\tilde{R}_N^{eq} \in]-\infty, 0]$ et si $A > 0$, $\tilde{R}_N^{eq} \leq -\frac{A}{K_T + \mu W}$. La quantité $\tilde{F}_T^{i+1} + \mu\tilde{F}_N^{i+1}$ est donc strictement positive. Ainsi, on entre dans la boucle de contact bloqué et on a $\underline{\dot{U}}^{i+1} \equiv 0$, ce qui implique $\underline{U}^{i+1} = \underline{U}^i$. Par suite,

$$\tilde{F}_T^j + \mu\tilde{F}_N^j = -h\{(K_T + \mu W)U_T^i + (F_T + \mu F_N)\} > 0,$$

et

$$\tilde{F}_T^j - \mu\tilde{F}_N^j = -m\dot{U}_T^i + \tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} < 0.$$

Ce qui permet de montrer que les relations (IV.16) et (IV.17) sont satisfaites pour tout $j > i$. Ainsi $\underline{\dot{U}}^j \equiv 0$, pour tout $j > i$.

A présent, on suppose que les itérés précédant $i + 1$ correspondent à une phase de glissement négatif. La relation (IV.17) est bien évidemment satisfaite à l'itéré $i + 1$ (cf tableau II.1). Pour conclure, il suffit d'établir que la quantité $\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1}$ est strictement négative.

On a

$$\begin{aligned}\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} &= m\dot{U}_T^i - h\{(K_T - \mu W)U_T^i + (F_T - \mu F_N)\}, \\ &< -h\{(K_T - \mu W)U_T^i + (F_T - \mu F_N)\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{si } \mu < \frac{K_T}{W}, \quad \tilde{F}_T^{i+1} - \mu \tilde{F}_N^{i+1} &< -h \left\{ (K_T - \mu W) U_T(\hat{t}) + (F_T - \mu F_N) \right\}, \\
 &< -h \left\{ \frac{A}{W} + (K_T - \mu W) \frac{R_N^{eq}}{W} \right\} < 0, \\
 \text{car } R_N^{eq} &\in \left[-\frac{A}{K_T - \mu W}, -\frac{A}{K_T + \mu W} \right], \\
 \text{si } \mu = \frac{K_T}{W}, \quad \tilde{F}_T^{i+1} - \mu \tilde{F}_N^{i+1} &< -h \frac{A}{W} < 0, \\
 \text{si } \mu > \frac{K_T}{W}, \quad \tilde{F}_T^{i+1} - \mu \tilde{F}_N^{i+1} &< -h \left\{ (K_T - \mu W) U_T^i + (F_T - \mu F_N) \right\}, \\
 &< -h \left\{ (K_T - \mu W) \frac{F_N}{W} + (F_T - \mu F_N) \right\}, \\
 &< -h \frac{A}{W} < 0.
 \end{aligned}$$

La quantité $\tilde{F}_T^{k+1} - \mu \tilde{F}_N^{k+1}$ est strictement négative. Ainsi, à l'itéré $i + 1$, on se trouve à l'intérieur de la boucle de contact bloqué, ce qui implique $\dot{U}^{i+1} \equiv 0$ et donc $\underline{U}^{i+1} = \underline{U}^i$. Comme précédemment, on obtient $\tilde{F}_T^j - \mu \tilde{F}_N^j < 0$ et $\tilde{F}_T^j + \mu \tilde{F}_N^j > 0$ pour tout $j > i$. Ce qui donne le résultat attendu.

Enfin, si $A = 0$ et $\mu = K_T/W$, il existe un itéré $i + 1$ tel que le glissement négatif cesse. Par conséquent, d'après le tableau II.1, la quantité $\tilde{F}_T^{i+1} + \mu \tilde{F}_N^{i+1}$ est strictement positive. Au même itéré,

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_T^{i+1} - \mu \tilde{F}_N^{i+1} &= m \dot{U}_T^i + h(F_T - \mu F_N), \\
 &< -h \frac{A}{W} = 0.
 \end{aligned}$$

Il vient $\dot{U}^{i+1} = 0$. Comme précédemment, on obtient $\tilde{F}_T^j - \mu \tilde{F}_N^j < 0$ et $\tilde{F}_T^j + \mu \tilde{F}_N^j > 0$ pour tout $j > i$. Ce qui implique que la vitesse \dot{U}^j est identiquement nulle pour tout $j > i$. \square

Malgré la remarque IV.1, la suite sera un peu simplifiée par le résultat global suivant où une perturbation en déplacement regroupe différentes situations de perturbations en vitesse.

Corollaire IV.2

Soit $A > 0$.

On étudie la dynamique du problème (IV.1) sur $[0, \hat{T}]$ à partir d'un état hors d'équilibre tel que :

$$\begin{cases} U_N(0) = 0, & U_T(0) = U_T^{eq} + U_{0T}, \\ R_T(0) = \pm \mu R_N(0) \neq 0, \\ \dot{U}_N(0) = 0, & \dot{U}_T(0) = 0. \end{cases}$$

Alors :

Si $\mu < K_T/W$, il existe η_1 et η_2 positifs, $\eta_2 > \eta_1$ tels que pour toute perturbation $U_{0T} \in]-\eta_1, \eta_2[$, il existe $\hat{t} > 0$ avec $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$, $R_N(\hat{t}) < 0$;

Si $\mu \geq K_T/W$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute perturbation $U_{0T} \in]-\infty, \eta[$, il existe $\hat{t} > 0$ tel que $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ avec $R_N(\hat{t}) < 0$.

Preuve :

* On étudie tout d'abord le cas $R_T(0) = +\mu R_N(0)$ avec $\mu < K_T/W$. En fonction de la valeur de U_{0T} , la masse peut soit glisser dans le sens positif, soit se trouver sur un état d'équilibre. Si la perturbation $U_{0T} \in [-\frac{A}{W(K_T - \mu W)} - \frac{R_N^{eq}}{W}, -\frac{A}{W(K_T + \mu W)} - \frac{R_N^{eq}}{W}]$, il existe un état d'équilibre tel que $R_N(0) = \tilde{R}_N^{eq}$. L'application du lemme IV.5 permet d'obtenir le résultat. Si $U_{0T} < -\frac{A}{W(K_T - \mu W)} - \frac{R_N^{eq}}{W}$, il n'existe pas d'état d'équilibre. Par conséquent, la masse est en glissement positif. D'après la relation (IV.6), la réaction normale croît. La masse est susceptible d'atteindre la pointe du cône avec une vitesse positive puis de décoller (corollaire IV.1). On va montrer que la vitesse tangentielle s'annule avant que la particule n'atteigne la pointe du cône si la perturbation U_{0T} de la position d'équilibre n'est pas trop grande.

Pendant le glissement bilatéral, l'évolution est décrite par :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N, \\ U_T(0) = U_T^{eq} + U_{0T}, \\ \dot{U}_T(0) = 0. \end{cases}$$

La solution est donnée par :

$$U_T(t) = \left(U_T^{eq} + U_{0T} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} t \right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}, \quad (\text{IV.18})$$

et il existe un instant $\hat{t} = \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} \pi$ tel que $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$. A cet instant $R_N(\hat{t})$ est strictement négative. Or :

$$\begin{aligned}
 U_T(\hat{t}) &= -\frac{R_N^{eq}}{W} - U_{0T} - \frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}, \\
 &= -2\frac{A}{W(K_T - \mu W)} - \frac{R_N^{eq}}{W} - U_{0T} + \frac{F_N}{W}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, si $U_{0T} > -2\frac{A}{W(K_T - \mu W)} - \frac{R_N^{eq}}{W}$, le glissement cesse avant que la réaction n'atteigne la pointe du cône.

Par conséquent, on obtient deux valeurs $\eta_1 = 2\frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{R_N^{eq}}{W} > 0$ et

$\eta_2 = -\frac{A}{W(K_T + \mu W)} - \frac{R_N^{eq}}{W} > 0$ telles que pour tout $U_{0T} \in]-\eta_1, \eta_2[$, $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ avec $R_N(\hat{t}) < 0$.

Si maintenant $\mu \geq K_T/W$, les phases de glissement positif sont impossibles. On a directement un état d'équilibre tel que $R_N(0) = \tilde{R}_N^{eq}$ pour tout $U_{0T} \in]-\infty, -\frac{A}{W(K_T + \mu W)} - \frac{R_N^{eq}}{W}]$. L'application du lemme IV.5 fournit le résultat.

* On étudie maintenant le cas $R_T(0) = -\mu R_N(0)$.

Si le coefficient de frottement μ est inférieur à K_T/W , la masse peut soit glisser dans le sens négatif, soit se trouver sur un état d'équilibre en fonction de la valeur de U_{0T} . En effet, l'ensemble du domaine admissible des réactions normales est $[-\frac{A}{K_T - \mu W}, -\frac{A}{K_T + \mu W}]$.

Ainsi, si la perturbation $U_{0T} \in [-\frac{A}{W(K_T - \mu W)} - \frac{R_N^{eq}}{W}, -\frac{A}{W(K_T + \mu W)} - \frac{R_N^{eq}}{W}]$, il existe un état d'équilibre tel que $R_N(0) = \tilde{R}_N^{eq}$. L'application du lemme IV.5 permet d'obtenir le résultat. En revanche si la perturbation $U_{0T} \in]-\frac{A}{W(K_T + \mu W)} - \frac{R_N^{eq}}{W}, -\frac{R_N^{eq}}{W}[$, la masse se trouve en glissement négatif et le problème de glissement bilatéral correspondant s'écrit :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T + \mu W)U_T = F_T + \mu F_N, \\ U_T(0) = U_T^{eq} + U_{0T}, \\ \dot{U}_T(0) = 0. \end{cases} \quad (IV.19)$$

Soit :

$$U_T(t) = \left(U_T^{eq} + U_{0T} - \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} t \right) + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}.$$

Ce qui donne un instant $\hat{t} = \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} \pi$ tel que $\dot{U}(\hat{t}) = 0$. La particule étant en glissement négatif, la réaction décroît, d'après la relation (IV.6). Par conséquent, $R_N(\hat{t}) < 0$.

Ainsi, il existe $\eta_1 = \frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{R_N^{eq}}{W} > 0$ et $\eta_2 = -\frac{R_N^{eq}}{W} > 0$ tels que $\forall U_{0T} \in [-\eta_1, \eta_2]$, il existe $\hat{t} > 0$ tel que $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ avec $R_N(\hat{t}) < 0$.

Si le coefficient de frottement $\mu \geq K_T/W$, alors pour tout $U_{0T} \in]-\infty, -\frac{A}{W(K_T + \mu W)} - \frac{R_N^{eq}}{W}]$, il existe un état d'équilibre tel que $R_N(0) = \tilde{R}_N^{eq}$. L'application du lemme IV.5 donne le résultat. En revanche, si $U_{0T} \in]-\frac{A}{W(K_T + \mu W)} - \frac{R_N^{eq}}{W}, -\frac{R_N^{eq}}{W}]$, l'évolution est décrite par un problème analogue au problème (IV.19) et l'on obtient un instant \hat{t} tel que la vitesse s'annule. On conclut que pour $\eta = -\frac{R_N^{eq}}{W} > 0$ le glissement résultant de toute perturbation $U_{0T} \in]-\infty, \eta]$ est tel qu'il existe $\hat{t} > 0$ avec $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ et $R_N(\hat{t}) < 0$.

Ce qui achève la démonstration. □

Lemme IV.6

Soit $A > 0$ et $\mu < K_T/W$.

On étudie la dynamique du problème (IV.1) à partir d'un état hors d'équilibre tel que $\forall t > 0, U_N(t) \equiv 0$:

$$\begin{cases} U_N(0) = 0, & U_T(0) = U_{0T}, \\ R_T(0) = \pm \mu R_N(0) \neq 0, \\ \dot{U}_N(0) = 0, & \dot{U}_T(0) = 0. \end{cases}$$

Soient $t_i, i = 1, \dots, n$ des instants $t_1 < \dots < t_n$ tels que

$$\begin{cases} \dot{U}_T(t_i) = 0 \text{ avec } R_N(t_i) \neq R_N^{eq}, & i = 1, \dots, n, \\ \text{sgn}(\dot{U}_T^-(t_i)) = \text{sgn}(\dot{U}_T^-(t_{i+2})) & i = 0, \dots, n-2. \end{cases}$$

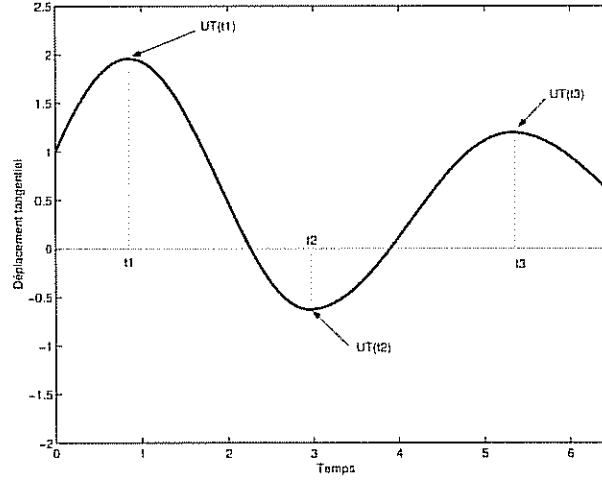
*Alors : Si $\text{sgn}(\dot{U}_T^-(t_j)) > 0, j = i, i+2 : U_T(t_i) > U_T(t_{i+2}), i = 1, \dots, n$;
Si $\text{sgn}(\dot{U}_T^-(t_j)) < 0, j = i, i+2 : U_T(t_i) < U_T(t_{i+2}), i = 1, \dots, n$.*

Preuve

La démonstration étant identique qu'il s'agisse d'un état hors d'équilibre caractérisé par $R_T(0) = +\mu R_N(0)$ ou $R_T(0) = -\mu R_N(0)$, on présente la preuve uniquement dans le premier cas.

Dans ce cas, il existe une phase de glissement positif à droite de l'origine et l'évolution pendant cette phase est solution de :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N, \\ U_T(0) = U_{0T}, \\ \dot{U}_T(0) = 0. \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$



La solution de ce problème est :

$$U_T(t) = \left\{ U_{0T} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \right\} \cos \left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} t \right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}. \quad (\text{IV.21})$$

La relation (IV.21) montre l'existence d'un instant $t_1 > 0$ tel que $\dot{U}_T(t_1) = 0$ avec $U_T(t_1) = -U_{0T} + 2\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}$.

A cet instant, la réaction normale vaut $R_N(t_1) = -WU_{0T} - \frac{2A}{K_T - \mu W} + F_N$. Par hypothèse, $R_N(t_1) \neq R_N^{eq}$, ce qui implique $U_{0T} < -\frac{2A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{A}{W(K_T + \mu W)} + \frac{F_N}{W}$.

La vitesse tangentielle étant continue, le mouvement se poursuit par une phase de glissement négatif donnée par :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T + \mu W)U_T = F_T + \mu F_N, \\ U_T(0) = -U_{0T} + 2\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}, \\ \dot{U}_T(0) = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$U_T(t) = \left\{ -U_{0T} + 2\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} - \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W} \right\} \cos \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} t \right) + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}.$$

La relation ci-dessus montre l'existence d'un instant $t_2 > t_1$ tel que $\dot{U}_T(t_2) = 0$. A cet instant, le déplacement tangentiel est égal à $U_T(t_2) = U_{0T} - 2\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} + 2\frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}$. Comme par hypothèse, $R_N(t_2) \neq R_N^{eq}$, la masse glisse dans le sens positif et l'évolution durant cette phase est décrite par un problème analogue au problème (IV.20) mais avec une condition initiale qui est maintenant $U_T(0) = U_{0T} - 2\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} + 2\frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}$. Il existe un instant $t_3 > t_2$ tel que $\dot{U}_T(t_3) = 0$ avec $U_T(t_3) = -U_{0T} + 4\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} - 2\frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}$. Il ne reste alors qu'à vérifier que $U_T(t_1) > U_T(t_3)$ soit $\frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W} > \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}$ qui est bien évidemment satisfait puisque $A > 0$ et $\mu < K_T/W$.

Le raisonnement précédent s'étend à tous les instants t_i , $i = 1, \dots, n$ et permet d'obtenir la conclusion désirée. \square

IV.3.3 Stabilité de tous les équilibres

On peut maintenant établir les résultats suivants :

Théorème IV.1

|| *Tout état d'équilibre décollé est stable.*

La masse n'étant dans ce cas soumise à aucune contrainte unilatérale, il s'agit d'un résultat classique de stabilité de solutions d'équations différentielles ordinaires.

On rappelle qu'un état d'équilibre décollé n'est obtenu que pour $A < 0$. De plus il n'existe qu'un seul état d'équilibre décollé, et celui-ci n'est associé à un état d'équilibre en contact que si $\mu > K_T/W$.

Théorème IV.2

|| *La position d'équilibre en contact affleurant caractérisée par $A = 0$ et $\mu < K_T/W$ est asymptotiquement stable.*

Preuve :

L'exposant eq désignant comme précédemment un état d'équilibre, et l'indice zéro une perturbation de l'équilibre à $t = 0$, on va établir l'implication suivante :

$$\exists \eta > 0, \left\{ \begin{array}{l} \|\underline{V}_0\| < \eta, \\ \|\underline{U}^{eq} - \underline{U}_0\| < \eta, \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\dot{\underline{U}}(t)\| = 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\underline{U}^{eq} - \underline{U}(t)\| = 0. \end{array} \right.$$

Étape 1 : Préliminaire

Au vu de la remarque IV.1, seules les perturbations en vitesse sont considérées. D'autre part, le lemme IV.2 montre que l'évolution de la particule est identique qu'il s'agisse d'une perturbation en vitesse tangentielle positive ou en vitesse normale négative. Enfin, on montre dans ce qui suit que l'étude des perturbations en vitesse tangentielle négative comprend l'étude des perturbations en vitesse tangentielle positive. (Il suffit de décaler l'origine du temps). Ces constatations signifient qu'il suffirait d'établir l'implication suivante :

$$\exists \eta > 0, V_{0T} \in]-\eta, 0] \implies \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} |U_N(t)| = 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} |U_T(t) - U_T^{eq}| = 0. \end{array} \right.$$

Mais on va en fait établir le résultat plus fort :

$$\forall V_{0T} < 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} |U_N(t)| = 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} |U_T(t) - U_T^{eq}| = 0. \end{array} \right.$$

Tout d'abord, on montre que le cas des perturbations en vitesse tangentielle négative comprend celui des perturbations en vitesse tangentielle positive. Pour cela, nous montrons que

suite à une perturbation V_{0T} négative, il existe un instant t_1^{pointe} avec $\dot{U}_T(t_1^{pointe}) > 0$. Ainsi, à partir de l'instant t_1^{pointe} , l'étude se ramène à l'évolution de la solution d'équilibre perturbée en vitesse tangentielle positive.

Suite à une perturbation en vitesse tangentielle négative, l'évolution est décrite par les relations ci-dessous :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T + \mu W)U_T = F_T + \mu F_N, \\ U_T(0) = \frac{F_N}{W}, \\ \dot{U}_T(0) = V_{0T} < 0. \end{cases} \quad (IV.22)$$

La solution du problème (IV.22) s'exprime :

$$U_T(t) = V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} \sin \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} t \right) + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}. \quad (IV.23)$$

L'expression (IV.23) donne l'existence d'un instant \hat{t}_1 tel que la vitesse s'annule. Comme à cet instant il n'existe pas de position d'équilibre, cette phase de glissement dans le sens négatif se poursuit par une phase de glissement dans le sens positif. Durant cette deuxième phase, le mouvement est solution de :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N, \\ U_T(0) = V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}, \\ \dot{U}_T(0) = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$U_T(t) = V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} \cos \left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} t \right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}.$$

Il existe alors un instant t_1^{pointe} tel que la masse se trouve à la pointe du cône. Cet instant vérifie :

$$U_T(t_1^{pointe}) = \frac{F_N}{W}.$$

Soit

$$V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} \cos \left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} t_1^{pointe} \right) = 0, \text{ car } A = K_T F_N - W F_T = 0.$$

Ce qui implique :

$$t_1^{pointe} = \sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}} \frac{\pi}{2}.$$

A cet instant, on a :

$$\dot{U}_T(t_1^{pointe}) = -V_{0T} \sqrt{\frac{K_T - \mu W}{K_T + \mu W}} > 0.$$

Par conséquent, à l'instant t_1^{pointe} , l'étude se ramène à l'évolution de la solution d'équilibre perturbée en vitesse tangentielle positive.

Etape 2 :

On montre que l'évolution de la particule comprend une succession de phases de glissement et de phases de mouvement sans contact. Plus précisément, soit t_i^{pointe} un instant où la réaction atteint la pointe du cône, tel que calculé à l'étape 1. L'évolution ultérieure est alors telle qu'il existe une phase de mouvement sans contact, un instant d'impact t_i^{imp} , une phase de glissement puis un nouvel instant t_{i+1}^{pointe} .

Au delà de t_i^{pointe} , la relation (IV.5) permet de caractériser le déplacement et la vitesse au moment de l'impact. Il vient :

$$U_T(t_i^{imp}) = \dot{U}_T(t_i^{pointe}) \frac{\sin(\alpha_1 t_i^{imp})}{\alpha_1} + \frac{F_N}{W}, \text{ avec } \sin(\alpha_1 t_i^{imp}) < 0,$$

$$\dot{U}_T(t_i^{imp}) = \dot{U}_T(t_i^{pointe}) \cos(\alpha_1 t_i^{imp}).$$

L'évolution de la masse à partir de l'instant t_i^{imp} dépend du signe de la vitesse tangentielle au moment de l'impact $\dot{U}_T(\dot{U}_T(t_i^{pointe}), t_i^{imp}(\dot{U}_T(t_i^{pointe}))) = \frac{dU_T(\dot{U}_T(t_i^{pointe}), t_i^{imp}(\dot{U}_T(t_i^{pointe})))}{dt}$ que l'algorithme "NSCD" approche par la vitesse calculée du dernier pas de temps de mouvement sans contact, et qui est une approximation de $\dot{U}_T^-(V_T(t_i^{pointe}), t_i^{imp}(V_T(t_i^{pointe})))$. Le déplacement qui intervient dans cette expression U_T est défini par la relation (IV.2). Comme précédemment le signe de cette vitesse notée $\dot{U}_T(t_i^{imp})$ dépend des coefficients de matrice de rigidité.

Si $\dot{U}_T(t_i^{imp}) > 0$, le glissement est positif. Durant cette phase, la dynamique est solution de :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N, \\ U_T(0) = U_T(t_i^{imp}), \\ \dot{U}_T(0) = \dot{U}_T(t_i^{imp}). \end{cases} \quad (IV.24)$$

En translatant les données initiales, on trouve de manière élémentaire un $\beta < 0$ tel que ce problème soit équivalent à :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N, \\ U_T(0) = \frac{F_N}{W} + \beta, \\ \dot{U}_T(0) = 0. \end{cases} \quad (IV.25)$$

La solution est donnée par :

$$U_T(t) = \beta \cos\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}t\right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W},$$

et la masse atteint la pointe du cône à l'instant t_{i+1}^{pointe} si la relation suivante est satisfaite :

$$U_T(t_{i+1}^{pointe}) = \frac{F_N}{W}.$$

On obtient par conséquent $t_{i+1}^{pointe} = \sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}} \frac{\pi}{2}$. Il en résulte $\dot{U}_T(t_{i+1}^{pointe}) = -\eta \sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} > 0$.

Donc si la vitesse au moment de l'impact est positive, la masse atteint la pointe du cône avec une vitesse strictement positive.

Si $\dot{U}_T(t_i^{imp}) < 0$, le glissement est positif. Durant cette phase, le mouvement est solution de :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T + \mu W)U_T = F_T + \mu F_N, \\ U_T(0) = U_T(t_i^{imp}), \\ \dot{U}_T(0) = \dot{U}_T(t_i^{imp}), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} U_T(t) = & \left(U_T(t_i^{imp}) - \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} t \right) \\ & + \dot{U}_T(t_i^{imp}) \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} \sin \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} t \right) + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}. \end{aligned}$$

Cette expression montre l'existence d'un instant \hat{t}_i tel que $\dot{U}_T(\hat{t}_i) = 0$. $R_N(\hat{t}_i)$ est alors strictement négatif. Cette phase de glissement négatif se poursuit par une phase de glissement positif. L'évolution est décrite par un système analogue à (IV.25). Il en résulte que si la vitesse au moment de l'impact est négative, la masse atteint la pointe du cône avec une vitesse strictement positive.

Quel que soit le signe de la vitesse au moment de l'impact, il existe donc un instant t_{i+1}^{pointe} pour lequel la vitesse tangentielle est positive. Les hypothèses du lemme IV.2 étant vérifiées, il existe ensuite un instant t_{i+1}^{imp} . La dynamique est donc constituée d'une succession de phases de mouvement sans contact et de glissement.

Etape 3 : Soient t_i^{pointe} et t_{i+1}^{pointe} deux instants consécutifs tels que $U_T(t_j^{pointe}) = \frac{F_N}{W}$, $j = i, i + 1$, $\dot{U}_T(t_{i+1}^{pointe}) < \dot{U}_T(t_i^{pointe})$.

Si $\dot{U}_T(t_i^{imp}) > 0$, la dynamique est solution du problème (IV.24) et la solution est donnée par :

$$\begin{aligned} U_T(t) = & \dot{U}_T(t_i^{pointe}) \frac{\sin(\alpha_1 t_i^{imp})}{\alpha_1} \cos \left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} t \right) \\ & + \sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}} \dot{U}_T(t_i^{pointe}) \cos(\alpha_1 t_i^{imp}) \sin \left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} t \right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}. \end{aligned}$$

D'après l'étape 2, il existe t_{i+1}^{pointe} tel que $U_T(t_{i+1}^{pointe}) = \frac{F_N}{W}$. A cet instant, l'expression de la vitesse est la suivante :

$$\begin{aligned} \dot{U}_T(t_{i+1}^{pointe}) = \dot{U}_T(t_i^{pointe}) & \left\{ -\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} \frac{\sin(\alpha_1 t_i^{imp})}{\alpha_1} \sin\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} t_{i+1}^{pointe}\right) \right. \\ & \left. + \cos(\alpha_1 t_i^{imp}) \cos\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} t_{i+1}^{pointe}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Or $\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} < \alpha_1$ et $\sin(\alpha_1 t_i^{imp}) < 0$, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{U}_T(t_{i+1}^{pointe}) & < \dot{U}_T(t_i^{pointe}) \left\{ -\sin(\alpha_1 t_i^{imp}) \sin\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} t_{i+1}^{pointe}\right) \right. \\ & \left. + \cos(\alpha_1 t_i^{imp}) \cos\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} t_{i+1}^{pointe}\right) \right\}, \\ & < \dot{U}_T(t_i^{pointe}) \cos\left(\alpha_1 t_i^{imp} + \sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} t_{i+1}^{pointe}\right), \\ & < \dot{U}_T(t_i^{pointe}). \end{aligned} \tag{IV.26}$$

Si $\dot{U}_T(t_i^{imp}) < 0$, l'évolution est décrite par la système (IV.26), et comme précédemment ce problème est équivalent à :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T + \mu W)U_T = F_T + \mu F_N, \\ U_T(0) = \frac{F_N}{W} + \dot{U}_T(t_i^{pointe}) \frac{\sin(\alpha_1 t_i^{imp})}{\alpha_1} + \beta, \quad \beta > 0, \\ \dot{U}_T(0) = 0. \end{cases}$$

La solution en est donnée par :

$$U_T(t) = \left(\dot{U}_T(t_i^{pointe}) \frac{\sin(\alpha_1 t_i^{imp})}{\alpha_1} + \beta \right) \cos\left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} t\right) + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W},$$

et donne l'existence d'un instant \hat{t}_i tel que la vitesse s'annule. Cette phase de glissement négatif se poursuit par une phase de glissement positif dont les données initiales sont $(U_T(0), \dot{U}_T(0)) = (-\dot{U}_T(t_i^{pointe}) \frac{\sin(\alpha_1 t_i^{imp})}{\alpha_1} - \beta + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}, 0)$. Le déplacement pendant cette phase s'écrit :

$$U_T(t) = - \left(\dot{U}_T(t_i^{pointe}) \frac{\sin(\alpha_1 t_i^{imp})}{\alpha_1} + \beta \right) \cos\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} t\right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}.$$

La masse atteint la pointe du cône à l'instant $t_{i+1}^{pointe} = \sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}} \frac{3\pi}{2}$ et on a :

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_T(t_{i+1}^{pointe}) &= - \left(\dot{U}_T(t_i^{pointe}) \frac{\sin(\alpha_1 t_i^{imp})}{\alpha_1} + \beta \right) \sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} \\
 &< - \dot{U}_T(t_i^{pointe}) \frac{\sin(\alpha_1 t_i^{imp})}{\alpha_1} \sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}, \\
 &< \frac{\dot{U}_T(t_i^{pointe})}{\alpha_1} \sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}, \\
 &< \dot{U}_T(t_i^{pointe}).
 \end{aligned} \tag{IV.27}$$

Ce qui montre que quel que soit le signe de la vitesse au moment de l'impact, la masse atteint la pointe du cône avec une vitesse positive $\dot{U}_T(t_{i+1}^{pointe}) < \dot{U}_T(t_i^{pointe})$.

Etape 4 : Soit t_{i+1}^{pointe} un instant tel que $U_T(t_{i+1}^{pointe}) = \frac{F_N}{W}$, i étant le numéro d'un cycle (glissement, mouvement sans contact). Alors

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \dot{U}_T(t_{i+1}^{pointe}) = 0.$$

D'après l'étape 3, l'expression de la vitesse à l'instant t_{i+1}^{pointe} dépend du signe de la vitesse au moment de l'impact mais les expressions (IV.26) et (IV.27) montrent que l'on peut pour chaque i trouver un γ_i tel que :

$$\dot{U}_T(t_{i+1}^{pointe}) < \gamma_i \dot{U}_T(t_i^{pointe}).$$

Ainsi,

$$\dot{U}_T(t_{i+1}^{pointe}) < \gamma^i \dot{U}_T(t_1^{pointe}),$$

avec

$$\gamma = \sup_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i < 1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \dot{U}_T(t_{i+1}^{pointe}) = 0.$$

Etape 5 : Conclusion

Suite à une perturbation en vitesse tangentielle négative de la position d'équilibre en glissement imminent, les étapes 1 et 2 montrent que la masse passe par une succession de phases de mouvement sans contact et de glissement. Les étapes 3 et 4 montrent que lorsque la masse se trouve à la pointe du cône la vitesse tangentielle tend vers 0 lorsque le temps tend vers l'infini. Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow +\infty} |U_T(t) - U_T^{eq}| &= 0, \\
 \lim_{t \rightarrow +\infty} |U_N(t)| &= 0,
 \end{aligned}$$

qui est le résultat annoncé. □

Théorème IV.3

$\left\| \begin{array}{l} \text{L'état d'équilibre en contact affleurant } \underline{U}^{affl} = (0, F_N/W), \underline{R}^{affl} = 0 \text{ caractérisé par} \\ A = 0 \text{ et } \mu = K_T/W \text{ est stable au sens de Lyapunov.} \end{array} \right.$

Preuve :

Conformément à la remarque IV.1, le théorème IV.3 sera démontré si l'on établit la relation suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0, \|\underline{V}_0\| < \eta \implies \|\underline{U}(t) - \underline{U}^{affl}\| < \varepsilon.$$

D'après le lemme IV.2, l'évolution de la particule en contact affleurant étant la même pour les perturbations en vitesse normale compatible avec la liaison unilatérale et pour les perturbations en vitesse tangentielle positive, il suffit de montrer que la relation suivante est satisfaite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0, |V_{0T}| < \eta \implies |U_T(t) - U_T^{affl}| < \varepsilon. \quad (\text{IV.28})$$

Etape 1 : On établit la relation IV.28 pour des perturbations en vitesse tangentielle négative.

L'équilibre en contact affleurant est donné par $\underline{U}^{affl} = (0, F_N/W)$ et $\underline{R}^{affl} = 0$. Après une perturbation par V_{0T} négative, la première phase de glissement est solution de :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + 2K_T U_T = \frac{WF_T + K_T F_N}{W}, \\ U_T(0) = \frac{F_N}{W}, \\ \dot{U}_T(0) = V_{0T} < 0. \end{cases}$$

Le déplacement tangentiel vérifie donc :

$$U_T(t) = V_{0T} \sqrt{\frac{m}{2K_T}} \sin \left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} t \right) + \frac{F_N}{W},$$

et la vitesse s'annule à $\hat{t} = \sqrt{\frac{m}{2K_T}} \frac{\pi}{2}$. Or pour $A = 0$ et $\mu = K_T/W$, le domaine admissible des réactions normales correspond à \mathbb{R}^- . Par conséquent, il existe un état d'équilibre $(\tilde{\underline{U}}^{eq}, \tilde{\underline{R}}^{eq})$ tel que $\tilde{\underline{R}}^{eq} = \underline{R}(\hat{t})$. Le lemme IV.5 permet donc de conclure que pour tout $t > \hat{t}$, la vitesse est identiquement nulle, et il vient :

$$\forall t > \hat{t}, |U_T^{affl} - U_T(t)| = |U_T^{affl} - U_T(\hat{t})| < -V_{0T} \sqrt{\frac{m}{2K_T}}.$$

$\forall \varepsilon > 0$, la relation (IV.28) est satisfaite avec $\eta = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{2K_T}{m}}$.

Etape 2 : On établit la relation IV.28 pour des perturbations en vitesse tangentielle positive.

A présent, considérons une perturbation tangentielle V_{0T} positive. D'après le lemme IV.2, il existe un instant d'impact $t_1^{imp} > 0$. L'évolution de la particule à partir de l'instant t_1^{imp} dépend du signe de la vitesse tangentielle $\dot{U}_T(t_1^{imp})$. Comme noté lors de l'étape 2 de la preuve du théorème IV.2, deux situations sont envisageables.

Si la vitesse au moment de l'impact $\dot{U}_T(t_1^{imp})$ est négative, l'évolution sur un intervalle à droite t_1^{imp} vérifie :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + 2K_T U_T = \frac{W F_T + K_T F_N}{W}, \\ U_T(0) = U_T(t_1^{imp}), \\ \dot{U}_T(0) = \dot{U}_T(t_1^{imp}) < 0. \end{cases} \quad (\text{IV.29})$$

Le déplacement et la vitesse au moment de l'impact sont donnés par la relation (IV.5) :

$$\begin{aligned} U_T(t_1^{imp}) &= V_{0T} \frac{\sin(\alpha_1 t_1^{imp})}{\alpha_1} + \frac{F_N}{W}, \\ \dot{U}_T(t_1^{imp}) &= V_{0T} \cos(\alpha_1 t_1^{imp}), \end{aligned}$$

et la solution du problème (IV.29) vérifie :

$$\begin{aligned} U_T(t) &= V_{0T} \frac{\sin(\alpha_1 t_1^{imp})}{\alpha_1} \cos\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} t\right) + V_{0T} \cos(\alpha_1 t_1^{imp}) \sqrt{\frac{m}{2K_T}} \sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} t\right) \\ &\quad + \frac{F_N}{W}. \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

On a donc un instant \hat{t} tel que $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$. Là encore, le domaine admissible des réactions normales étant \mathbb{R}^- , il existe un état d'équilibre $(\underline{\tilde{U}}^{eq}, \underline{\tilde{R}}^{eq})$ tel que $\underline{\tilde{R}}^{eq} = \underline{R}(\hat{t})$. Pour tout $t > \hat{t}$, la vitesse est donc identiquement nulle et l'on a :

$$\forall t > \hat{t}, |U_T^{affl} - U_T(t)| = |U_T^{affl} - U_T(\hat{t})| < V_{0T} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sqrt{\frac{m}{2K_T}} \right).$$

$\forall \varepsilon > 0$, la relation (IV.28) est satisfaite avec $\eta = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\alpha_1 \sqrt{2K_T}}{\sqrt{2K_T} + \alpha_1 \sqrt{m}}$.

Si la vitesse au moment de l'impact $\dot{U}_T(t_1^{imp})$ est positive, la phase de glissement positif qui suit t_1^{imp} se fait à vitesse constante $\dot{U}_T(t_1^{imp})$. Il existe donc trivialement un instant t_2^{pointe} tel que $U_T(t_2^{pointe}) = \frac{F_N}{W}$ avec $\dot{U}_T(t_2^{pointe}) = \dot{U}_T(t_1^{imp}) > 0$ puis un instant d'impact $t_2^{imp} > t_2^{pointe}$.

Soient t_i^{imp} et t_{i+1}^{imp} deux instants d'impact consécutifs. On va montrer qu'il existe un instant d'impact t_l^{imp} tel que $\dot{U}_T(t_{l-1}^{imp}) > 0$ et $\dot{U}_T(t_l^{imp}) < 0$. A partir de l'instant t_l^{imp} , une discussion

analogue à celle de l'étape 1 permet de conclure.

Supposons que pour tout $i < l$, $\dot{U}_T(t_j^{imp}) > 0$, $j = i, i + 1$. On a :

$$\dot{U}_T(t_{i+1}^{imp}) = \dot{U}_T(t_i^{imp}) \cos(\alpha_1 t_{i+1}^{imp}) < \dot{U}_T(t_i^{imp}).$$

Par conséquent, la valeur de la vitesse entre deux phases consécutives de glissement positif diminue.

Durant chaque phase de glissement, la vitesse est constante et la masse atteint la pointe du cône à l'instant t_{j+1}^{pointe} avec une vitesse $\dot{U}_T(t_{j+1}^{pointe}) = \dot{U}_T(t_j^{imp})$. De plus, le déplacement tangentiel satisfait :

$$U_T(t) = \dot{U}_T(t_j^{imp})t + U_T(t_j^{imp}).$$

On déduit alors la durée du glissement positif :

$$\Delta t_{j+1}^{pointe} = -\frac{\dot{U}_T(t_j^{imp}) \sin(\alpha_1 t_{j+1}^{imp})}{\dot{U}_T(t_{j+1}^{imp}) \alpha_1}.$$

Il en résulte :

$$\Delta t_{i+2}^{pointe} < \Delta t_{i+1}^{pointe}.$$

La durée de mouvement sans contact étant identique pour chacune des phases, il existe un instant d'impact $t_l^{imp} \in \left[\frac{\pi}{\alpha_1}, \frac{3\pi}{2\alpha_1}\right] + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\dot{U}_T(t_l^{imp}) < 0$.

A partir de l'instant t_l^{imp} , la masse est en glissement négatif donné par le système :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + 2K_T U_T = \frac{W F_T + K_T F_N}{W}, \\ U_T(0) = U_T(t_l^{imp}) = \dot{U}_T(t_{l-1}^{imp}) \frac{\sin(\alpha_1 t_l^{imp})}{\alpha_1} + \frac{F_N}{W}, \\ \dot{U}_T(0) = \dot{U}_T(t_l^{imp}) = \dot{U}_T(t_{l-1}^{imp}) \cos(\alpha_1 t_l^{imp}) < 0. \end{cases}$$

La solution s'exprime :

$$\begin{aligned} U_T(t) = & \dot{U}_T(t_{l-1}^{imp}) \frac{\sin(\alpha_1 t_l^{imp})}{\alpha_1} \cos\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} t\right) \\ & + \dot{U}_T(t_{l-1}^{imp}) \cos(\alpha_1 t_l^{imp}) \sqrt{\frac{m}{2K_T}} \sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} t\right) + \frac{W F_T + K_T F_N}{2K_T W}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit un instant \hat{t} tel que la vitesse s'annule. A cet instant, la réaction normale $R_N(\hat{t})$ correspond à un état d'équilibre puisque le domaine admissible des réactions normales est \mathbb{R}^- . Par conséquent, d'après le lemme IV.5, la vitesse reste nulle pour tout $t > \hat{t}$. Il en résulte :

$$\begin{aligned}
 \forall t > \hat{t}, \quad |U_T^{affl} - U_T(t)| &= |U_T^{affl} - U_T(\hat{t})| \\
 &< \left| \dot{U}_T(t_{l-1}^{imp}) \frac{\sin(\alpha_1 t_l^{imp})}{\alpha_1} \cos\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} \hat{t}\right) + \dot{U}_T(t_{l-1}^{imp}) \cos(\alpha_1 t_l^{imp}) \sqrt{\frac{m}{2K_T}} \sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} \hat{t}\right) \right|, \\
 &< V_{0T} \left| \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\sin(\alpha_1 t_j^{imp})}{\alpha_1} \cos\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} \hat{t}\right) + \prod_{j=1}^{l-1} \cos(\alpha_1 t_j^{imp}) \sqrt{\frac{m}{2K_T}} \sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} \hat{t}\right) \right|, \\
 &< V_{0T} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sqrt{\frac{m}{2K_T}} \right).
 \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$, la relation (IV.28) est satisfaite avec $\eta = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\alpha_1 \sqrt{2K_T}}{\sqrt{2K_T} + \alpha_1 \sqrt{m}}$. □

Théorème IV.4

|| *Tous les états d'équilibre en glissement imminent positif correspondant à $A = 0$ et $\mu = K_T/W$ ayant une réaction normale strictement négative sont instables.*

Preuve :

On va montrer que dans tout voisinage de la position d'équilibre en glissement imminent ($\underline{U}^{eq}, \underline{R}^{eq}$) on peut toujours trouver une perturbation V_{0T} positive telle que la dynamique qui suit sorte de ce voisinage et diverge de la position d'équilibre. Une conséquence du théorème IV.3 montrera que la solution arrive toujours dans un voisinage de la solution d'équilibre en contact affleurant $\underline{U}^{affl} = (0, F_N/W)$, $\underline{R}^{affl} = 0$. En d'autres termes,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ et } \eta > 0, \exists |V_{0T}| < \eta \implies |U_T^{eq} - U_T(t)| > \varepsilon,$$

et l'on montrera que,

$$|U_T^{affl} - U_T(t)| < \varepsilon. \quad (\text{IV.31})$$

\underline{U}^{affl} étant à distance finie de \underline{U}^{eq} , l'obtention de (IV.31) démontrera le résultat.

Soit donc une position d'équilibre en glissement imminent que l'on perturbe avec une vitesse tangentielle V_{0T} positive infinitésimale. On rappelle que pour $A = 0$ et $\mu = K_T/W$, la masse glisse dans le sens positif avec une vitesse constante V_{0T} . Il existe donc un instant $t_1^{pointe} > 0$ tel que la masse se trouve à la pointe du cône. On est ainsi dans le cadre des hypothèses du théorème IV.3. A partir de l'instant t_1^{pointe} , la discussion est analogue à celle de l'étape 2 de la preuve du théorème IV.3. La masse décolle et il existe un instant t_1^{imp} tel que la masse entre en contact. Les relations (IV.4) et (IV.5) fournissent le déplacement tangentiel au moment de l'impact :

$$\begin{aligned}
 U_T(t_1^{imp}) &= V_{0T} \frac{\sin(\alpha_1 t_1^{imp})}{\alpha_1} + \frac{F_N}{W}, \\
 \dot{U}_T(t_1^{imp}) &= V_{0T} \cos(\alpha_1 t_1^{imp}).
 \end{aligned}$$

L'évolution de la particule après l'impact dépend du signe de la vitesse tangentielle $\dot{U}_T(V_{0T}, t_1^{imp}(V_{0T}))$.

Supposons $\dot{U}_T(t_1^{imp}) < 0$. Durant la phase de glissement négatif, l'évolution est décrite par le système (IV.29). La solution est donnée par l'expression (IV.30).

La relation (IV.30) montre qu'il existe \hat{t} tel que $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$. L'ensemble du domaine admissible de la réaction normale étant \mathbb{R}^- , il existe un état d'équilibre $(\tilde{U}^{eq}, \tilde{R}^{eq})$ tel que $\underline{R}(\hat{t}) = \tilde{R}^{eq}$. Par conséquent, le lemme IV.5 montre que $\dot{U}_T(t) \equiv 0$ pour tout $t > \hat{t}$.

V_{0T} étant infinitésimale, il vient :

$$\begin{aligned} \forall t > \hat{t}, |U_T(t) - U_T^{eq}| &= |U_T(\hat{t}) - U_T^{eq}| \\ &= \left| V_{0T} \frac{\sin(\alpha_1 t_1^{imp})}{\alpha_1} \cos\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} \hat{t}\right) + V_{0T} \cos(\alpha_1 t_1^{imp}) \sqrt{\frac{m}{2K_T}} \sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} \hat{t}\right) - \frac{R_N^{eq}}{W} \right|, \\ &> V_{0T} \left| \frac{\sin(\alpha_1 t_1^{imp})}{\alpha_1} \cos\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} \hat{t}\right) + \cos(\alpha_1 t_1^{imp}) \sqrt{\frac{m}{2K_T}} \sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} \hat{t}\right) \right|. \end{aligned}$$

D'après l'étape 2 de la preuve du théorème IV.3, on a :

$$\begin{aligned} \forall t > \hat{t}, |U_T(t) - U_T^{affl}| &= |U_T(\hat{t}) - U_T^{affl}| \\ &< V_{0T} \left| \frac{\sin(\alpha_1 t_1^{imp})}{\alpha_1} \cos\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} \hat{t}\right) + \cos(\alpha_1 t_1^{imp}) \sqrt{\frac{m}{2K_T}} \sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} \hat{t}\right) \right|, \\ &< V_{0T} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sqrt{\frac{m}{2K_T}} \right). \end{aligned}$$

Il existe donc $\eta > 0$ tel que la relation (IV.31) soit vérifiée puisqu'il suffit de choisir

$$\eta = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\alpha_1 \sqrt{2K_T}}{\sqrt{2K_T} + \alpha_1 \sqrt{m}}.$$

A présent, supposons $\dot{U}_T(t_1^{imp}) > 0$. La masse glisse dans le sens positif avec une vitesse constante $\dot{U}_T(t_1^{imp}) > 0$ et atteint le cône. La suite est comme précédemment. Soit t_l^{imp} un instant d'impact avec $\dot{U}_T(t_l^{imp}) < 0$ (cf théorème IV.3 étape 2). Alors il existe un instant \hat{t} tel que $\dot{U}_T(t) \equiv 0$ pour tout $t > \hat{t}$. La perturbation initiale étant infinitésimale, on a :

$$\begin{aligned}
 \forall t > \hat{t}, \quad |U_T(t) - U_T^{eq}| &> |U_T(\hat{t}) - U_T^{eq}|, \\
 &= \left| V_T(t_{l-1}^{imp}) \frac{\sin(\alpha_1 t_l^{imp})}{\alpha_1} \cos\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} \hat{t}\right) \right. \\
 &\quad \left. + V_T(t_{l-1}^{imp}) \cos(\alpha_1 t_l^{imp}) \sqrt{\frac{m}{2K_T}} \sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} \hat{t}\right) - \frac{R_N^{eq}}{W} \right|, \\
 &> V_{0T} \left| \prod_{j=1}^{l-1} \cos(\alpha_1 t_j^{imp}) \left\{ \frac{\sin(\alpha_1 t_l^{imp})}{\alpha_1} \cos\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} \hat{t}\right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \cos(\alpha_1 t_l^{imp}) \sqrt{\frac{m}{2K_T}} \sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}} \hat{t}\right) \right\} \right|.
 \end{aligned}$$

Toujours par le même argument qu'à l'étape 2 de la preuve du théorème IV.3 :

$$\forall t > \hat{t}, \quad |U_T(t) - U_T^{affl}| = |U_T(\hat{t}) - U_T^{affl}| < V_{0T} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sqrt{\frac{m}{2K_T}} \right).$$

Par conséquent, il existe $\eta > 0$ tel que la relation (IV.31) soit vérifiée. Il suffit de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\alpha_1 \sqrt{2K_T}}{\sqrt{2K_T} + \alpha_1 \sqrt{m}}$.

Ainsi, la trajectoire issue de toute donnée initiale voisine de l'équilibre en glissement imminent $(\underline{U}^{eq}, \underline{R}^{eq})$ entre en temps fini \hat{t} dans un voisinage de $(\underline{U}^{affl}, \underline{R}^{affl} = 0)$. \square

Théorème IV.5

\parallel Soit $A \geq 0$ avec $\mu > K_T/W$ si $A = 0$, μ quelconque si $A > 0$.
 \parallel Tous les états d'équilibre sont stables au sens de Lyapunov.

Preuve :

On va établir l'implication suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0, \quad \|V_0\| < \eta, \implies \|\underline{U}^{eq} - \underline{U}(t)\| < \varepsilon. \quad (\text{IV.32})$$

Etape 1 : On établit la relation (IV.32) pour des perturbations en vitesse tangentielle V_{0T} négative.

On fait tout d'abord la remarque suivante. Lorsque $A > 0$ avec $\mu < K_T/W$, la phase de glissement négatif qui suit une perturbation en vitesse tangentielle négative peut être elle-même suivie d'une phase de glissement positif. Par conséquent, la masse peut atteindre la

pointe du cône puis décoller conformément au corollaire IV.1. Afin d'éviter cette situation, on détermine un paramètre $\eta > 0$ tel que $\forall V_{0T} \in]-\eta, 0[$, la situation décrite précédemment soit exclue.

Supposons que la phase de glissement négatif soit suivie d'une phase de glissement positif et montrons qu'il existe \hat{t} tel que $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ avec $R_N(\hat{t}) < 0$.

Durant la phase de glissement négatif, l'évolution est décrite par :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T + \mu W)U_T = F_T + \mu F_N, \\ U_T(0) = \frac{F_N}{W} + \frac{R_N^{eq}}{W}, \\ \dot{U}_T(0) = V_{0T} < 0, \end{cases} \quad (\text{IV.33})$$

c'est-à-dire :

$$U_T(t) = \left(\frac{A}{W(K_T + \mu W)} + \frac{R_N^{eq}}{W} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} t \right) + V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} \sin \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} t \right) + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}.$$

Il existe donc un instant \tilde{t} tel que $\dot{U}_T(\tilde{t}) = 0$. On sait alors d'après le lemme IV.5 que si il n'existe pas d'état d'équilibre $(\tilde{U}^{eq}, \tilde{R}^{eq})$ tel que $\tilde{R}^{eq} = \underline{R}(\tilde{t})$ le mouvement se poursuit par une phase de glissement positif qui sera alors donnée par :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N, \\ U_T(0) = U_T(\tilde{t}), \\ \dot{U}_T(0) = 0, \end{cases}$$

avec $U_T(\tilde{t}) < -\frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{F_N}{W}$.

La solution est :

$$U_T(t) = \left(U_T(\tilde{t}) - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} t \right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}.$$

Dire que la masse s'arrête de glisser avant d'atteindre la pointe du cône se traduit par :

$$\exists \hat{t} > \tilde{t} \text{ tel que } \dot{U}_T(\hat{t}) = 0 \text{ avec } U_T(\hat{t}) < \frac{F_N}{W}. \quad (\text{IV.34})$$

On a :

$$\begin{aligned} U_T(\hat{t}) &< -U_T(\tilde{t}) + 2\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}, \\ &< -\left\{ \frac{A}{W(K_T + \mu W)} + \frac{R_N^{eq}}{W} \right\} - V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} + 2\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}. \end{aligned}$$

La condition (IV.34) est satisfaite si la perturbation V_{0T} vérifie :

$$V_{0T} > \sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} \left\{ -\frac{2A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{A}{W(K_T + \mu W)} \right\},$$

ce qui donne explicitement la valeur de η .

A présent, soit $(\underline{U}^{eq}, \underline{R}^{eq})$ une position d'équilibre perturbée et V_{0T} une perturbation infinitésimale en vitesse tangentielle négative. Pour $A > 0$ et $\mu < K_T/W$, on suppose pour l'instant $R_N^{eq} \neq -\frac{A}{K_T - \mu W}$. Suite à cette perturbation initiale $V_{0T} < 0$, la masse est en glissement négatif. D'après le lemme IV.4, il existe un instant $\hat{t} > 0$ tel que $\dot{U}(\hat{t}) = 0$ avec $U_T(\hat{t})$ de la forme (IV.15). La perturbation étant infinitésimale, il existe un état d'équilibre $(\underline{U}^{eq}, \underline{R}^{eq})$ à l'instant \hat{t} tel que $R_N(\hat{t}) = \tilde{R}_N^{eq}$. Il en résulte :

$$\begin{aligned} \forall t > \hat{t}, |U_T^{eq} - U_T(t)| &= |U_T^{eq} - U_T(\hat{t})| = U_T^{eq} - U_T(\hat{t}) \\ &= \frac{F_N}{W} + \frac{R_N^{eq}}{W} - \left(\frac{A}{W(K_T + \mu W)} + \frac{R_N^{eq}}{W} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} \hat{t} \right) \\ &\quad - V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} \sin \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} \hat{t} \right) - \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}, \\ &= \frac{A}{W(K_T + \mu W)} + \frac{R_N^{eq}}{W} - \left(\frac{A}{W(K_T + \mu W)} + \frac{R_N^{eq}}{W} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} \hat{t} \right) \\ &\quad - V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} \sin \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} \hat{t} \right), \\ &< -V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}}. \end{aligned} \tag{IV.3}$$

$\forall \varepsilon > 0$, la relation (IV.32) est donc vérifiée avec $\eta = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}}$ pour $V_{0T} < 0$.

A présent, étudions le cas particulier $R_N^{eq} = -\frac{A}{K_T - \mu W}$ pour $A > 0$ avec $\mu < K_T/W$. D'après le lemme IV.4, il existe un instant $\tilde{t} > 0$ tel que $\dot{U}(\tilde{t}) = 0$ avec $U_T(\tilde{t})$ donné par (IV.15) et $R_N(\tilde{t}) < -\frac{A}{K_T - \mu W}$. A l'instant \tilde{t} , les hypothèses du corollaire IV.2 sont vérifiées. Par conséquent, la masse glisse dans le sens positif. Il existe un instant $\hat{t} > \tilde{t}$ tel que $\dot{U}(\hat{t}) = 0$ avec $U_T(\hat{t})$ solution de (IV.18). La perturbation initiale V_{0T} étant choisie infinitésimale, il existe $(\underline{\tilde{U}}^{eq}, \underline{\tilde{R}}^{eq})$ tel que $R_N(\hat{t}) = \tilde{R}_N^{eq}$. En effet,

$$R_N(\hat{t}) = WU_T(\hat{t}) - F_N = -WU_T(\tilde{t}) + 2W \frac{(F_N - \mu W)}{K_T - \mu W} - F_N.$$

Or,

$$U_T(\tilde{t}) < \frac{F_N}{W} - \frac{A}{W(K_T - \mu W)}.$$

Il vient,

$$R_N(\tilde{t}) > -\frac{A}{K_T - \mu W}.$$

La perturbation étant infinitésimale, on a $R_N(\hat{t}) < -\frac{A}{K_T + \mu W}$. Le domaine admissible des réactions normales est ici $[-\frac{A}{K_T - \mu W}, -\frac{A}{K_T + \mu W}]$: il vient que pour tout $t > \hat{t}$, $\dot{U}(t) \equiv 0$ par l'application du lemme IV.5. Il en résulte :

$$\begin{aligned} \forall t > \hat{t}, |U_T^{eq} - U_T(t)| &= |U_T^{eq} - U_T(\tilde{t})| < U_T(\tilde{t}) - U_T(\tilde{t}) \\ &= \left(U_T(\tilde{t}) - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} \tilde{t} \right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \\ &\quad - \left(-\frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{A}{W(K_T + \mu W)} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} \tilde{t} \right) \\ &\quad - V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} \sin \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} \tilde{t} \right) - \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}, \\ &< - \left(U_T(\tilde{t}) - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} - \left(-\frac{A}{W(K_T - \mu W)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{A}{W(K_T + \mu W)} \right) - V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} - \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}, \\ &< 2 \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} - 2 V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} - 2 \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W} \\ &\quad - 2 \left(-\frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{A}{W(K_T + \mu W)} \right), \end{aligned}$$

$$\forall t > \hat{t}, |U_T^{eq} - U_T(t)| < -2 V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}}.$$

$\forall \varepsilon > 0$, la relation (IV.32) est vérifiée avec $\eta = \varepsilon \sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}}$ pour $V_{0T} < 0$.

Pour $A = 0$ avec $\mu > K_T/W$ ou pour $A > 0$ avec $\mu \geq K_T/W$, aucune restriction sur la valeur de la perturbation V_{0T} n'est nécessaire. En effet, lors d'un glissement négatif, la réaction normale décroît. Par conséquent, le domaine admissible étant $]-\infty, -\frac{A}{K_T + \mu W}]$, il existe une position d'équilibre lorsque la vitesse s'annule. La relation (IV.35) est toujours valable. Ce qui permet d'établir la relation (IV.32).

Pour $A > 0$ avec $\mu < K_T/W$, la relation (IV.32) est valable pour des perturbations

$V_{0T} \in]-\eta, 0[$, où η est défini au début de l'étape 1. En fonction de la grandeur de V_{0T} , les phases de glissement négatif et positif se succèdent. L'application des lemmes IV.5, IV.6 et du corollaire IV.2 prouve l'existence d'un instant \hat{t} tel que pour tout $t > \hat{t}$, la vitesse est identiquement nulle. Par conséquent, la relation (IV.32) est satisfaite.

Etape 2 : On établit la relation (IV.32) pour des perturbations en vitesse tangentielle V_{0T} positive satisfaisant les conditions du lemme IV.4.

On rappelle que si $(\underline{U}^{eq}, \underline{R}^{eq})$ est la position d'équilibre en contact affleurant, une phase de mouvement sans contact suit la perturbation (cf lemme IV.2). L'évolution est donc identique à l'évolution de cette solution d'équilibre perturbée en vitesse normale négative. Par conséquent, pour cette position d'équilibre, le résultat sera présenté à l'étape 3.

Soit donc $(\underline{U}^{eq}, \underline{R}^{eq})$, $R_N^{eq} \neq 0$ une solution d'équilibre perturbée avec une vitesse positive V_{0T} infinitésimale.

Dans un premier temps, on suppose que si $A > 0$, $R_N^{eq} \neq -\frac{A}{K_T + \mu W}$. La masse glisse alors dans le sens positif. D'après le lemme IV.4, il existe un instant $\hat{t} > 0$ tel que $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$. La perturbation étant infinitésimale, il existe une position d'équilibre $(\tilde{U}^{eq}, \tilde{R}^{eq})$ tel que $R_N(\hat{t}) = \tilde{R}^{eq}$. Le lemme IV.5 implique :

$$\forall t > \hat{t}, |U_T^{eq} - U_T(t)| = |U_T^{eq} - U_T(\hat{t})| = U_T(\hat{t}) - U_T^{eq}. \quad (IV.36)$$

En fonction du coefficient de frottement, les relations (IV.10), (IV.11), (IV.12) permettent d'exprimer l'inégalité (IV.36) sous l'une des formes :

* Si $\mu < \frac{K_T}{W}$,

$$\begin{aligned} \forall t > \hat{t}, |U_T^{eq} - U_T(t)| &= U_T(\hat{t}) - U_T^{eq}, \\ &= \left(\frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{R_N^{eq}}{W} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} \hat{t} \right) \\ &\quad + V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}} \sin \left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} \hat{t} \right) \\ &\quad + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} - \frac{F_N}{W} - \frac{R_N^{eq}}{W}, \\ &< V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}}. \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$, la relation (IV.32) est vérifiée avec $\eta = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}$ pour $V_{0T} > 0$.

* Si $\mu = \frac{K_T}{W}$,

$$\forall t > \hat{t}, |U_T^{eq} - U_T(t)| = -\frac{A}{2mW}\hat{t}^2 + V_{0T}\hat{t} + \frac{F_N}{W} + \frac{R_N^{eq}}{W} - \frac{F_N}{W} - \frac{R_N^{eq}}{W}.$$

D'après (IV.11), on en déduit : $\hat{t} = \frac{V_{0T}mW}{A}$. Ainsi,

$$\forall t > \hat{t}, |U_T^{eq} - U_T(t)| = \frac{mWV_{0T}^2}{2A}.$$

$\forall \varepsilon > 0$, la relation (IV.32) est vérifiée avec $\eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon 2A}{mW}}$ pour $V_{0T} > 0$.

* Si $\mu > \frac{K_T}{W}$,

$$\begin{aligned} \forall t > \hat{t}, |U_T^{eq} - U_T(t)| &= \left(\frac{A}{W(\mu W - K_T)} + \frac{R_N^{eq}}{W} + V_{0T}\sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} \right) e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}t} \\ &\quad + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} - \frac{F_N}{W} - \frac{R_N^{eq}}{W}. \end{aligned}$$

La perturbation étant suffisamment petite, l'instant pour lequel la vitesse s'annule sera suffisamment proche de zéro et donc :

$$\begin{aligned} \forall t > \hat{t}, |U_T^{eq} - U_T(t)| &= \left(\frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{R_N^{eq}}{W} + V_{0T}\sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} \right) \\ &\quad - \left(\frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{R_N^{eq}}{W} \right) + \mathcal{O}(V_{0T}^2), \\ &= V_{0T}\sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} + \mathcal{O}(V_{0T}^2). \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$, la relation (IV.32) est vérifiée avec $\eta = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}$ pour $V_{0T} > 0$.

A présent, considérons l'état d'équilibre en glissement imminent négatif $R_N^{eq} = -\frac{A}{K_T + \mu W}$ pour $A > 0$.

D'après le lemme IV.4, il existe un instant $\tilde{t} > 0$ tel que $\dot{U}(\tilde{t}) = 0$ avec $U_T(\tilde{t}) > \frac{F_N}{W} - \frac{A}{W(K_T + \mu W)}$. A l'instant \tilde{t} , on se trouve sous les hypothèses du corollaire IV.2. La masse glisse dans le sens négatif et il existe un instant $\hat{t} > \tilde{t}$ tel que $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ et $R_N(\hat{t})$ étant égal à la réaction d'une position d'équilibre $(\underline{\tilde{U}}^{eq}, \underline{\tilde{R}}^{eq})$. En effet,

$$R_N(\hat{t}) = WU_T(\hat{t}) - F_N, = -WU_T(\tilde{t}) + 2W\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} - F_N.$$

Or

$$U_T(\tilde{t}) > \frac{F_N}{W} - \frac{A}{W(K_T - \mu W)}.$$

Il vient :

$$R_N(\hat{t}) < -\frac{A}{K_T + \mu W}.$$

Pour $A = 0$ avec $\mu > K_T/W$ ou $A > 0$ avec $\mu \geq K_T/W$, le domaine admissible des réactions normales est $] -\infty, -\frac{A}{K_T + \mu W}[$. Pour $A > 0$ avec $\mu < K_T/W$, la perturbation étant supposée infinitésimale, on a $R_N(\hat{t}) > -\frac{A}{K_T - \mu W}$. Ce qui implique que $R_N(\hat{t})$ appartient au domaine admissible des réactions normales.

Par conséquent, d'après le lemme IV.5, il vient :

$$\forall t > \hat{t}, |U_T^{eq} - U_T(t)| = |U_T^{eq} - U_T(\hat{t})| < U_T(\tilde{t}) - U_T(\hat{t}).$$

Les quantités $U_T(\tilde{t})$ et $U_T(\hat{t})$ s'obtiennent comme précédemment grâce aux relations (IV.10), (IV.11), (IV.12) et (IV.21).

* Si $\mu < \frac{K_T}{W}$,

$$\forall t > \hat{t}, |U_T^{eq} - U_T(t)| < U_T(\tilde{t}) - U_T(\hat{t}),$$

$$\begin{aligned} &< \left(\frac{A}{W(K_T - \mu W)} - \frac{A}{W(K_T + \mu W)} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} \tilde{t} \right) \\ &+ V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}} \sin \left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} \tilde{t} \right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \\ &- \left(U_T(\tilde{t}) - \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} \hat{t} \right) - \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}, \\ &< 2 \left(\frac{A}{W(K_T - \mu W)} - \frac{A}{W(K_T + \mu W)} \right) + 2V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}} \\ &+ 2 \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} - 2 \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}, \\ &< 2V_{0T} \sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, la relation (IV.32) est vérifiée avec $\eta = \varepsilon \sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}$ pour $V_{0T} > 0$.

* Si $\mu = \frac{K_T}{W}$,

$$\begin{aligned}
 \forall t > \hat{t}, \quad |U_T^{eq} - U_T(t)| &< U_T(\tilde{t}) - U_T(\hat{t}), \\
 &< U_T(\tilde{t}) - \left(U_T(\tilde{t}) - \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{(K_T + \mu W)}{m}} \tilde{t} \right) - \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}, \\
 &< 2U_T(\tilde{t}) - 2\frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}, \\
 &< \frac{V_{0T}^2 m W}{A} + \frac{2F_N}{W} - \frac{2A}{W(K_T + \mu W)} - 2\frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}, \\
 &< \frac{V_{0T}^2 m W}{A}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0$, la relation (IV.32) est vérifiée avec $\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon 2A}{mW}}$ pour $V_{0T} > 0$.

* Si $\mu > K_T/W$. La perturbation étant suffisamment petite, l'instant pour lequel la vitesse s'annule sera suffisamment proche de zéro. Le déplacement $U_T(\tilde{t})$ solution de (IV.12) à l'instant tel que $\dot{U} = 0$ s'exprime :

$$U_T(\tilde{t}) = \left(\frac{A}{W(K_T - \mu W)} - \frac{A}{W(K_T + \mu W)} + V_{0T} \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} \right) e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} \tilde{t}} + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W},$$

que l'on réécrit

$$U_T(\tilde{t}) = \frac{A}{W(K_T - \mu W)} - \frac{A}{W(K_T + \mu W)} + V_{0T} \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} + \mathcal{O}(V_{0T}^2).$$

Quant à la valeur de $U_T(\hat{t})$, elle est solution d'un problème analogue au problème (IV.33) dont les conditions initiales sont $(U_T(0), \dot{U}_T(0)) = (U_T(\tilde{t}), 0)$ et s'écrit :

$$U_T(\hat{t}) = \left(U_T(\tilde{t}) - \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} \hat{t} \right) + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}.$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned}
 \forall t > \hat{t}, \quad |U_T^{eq} - U_T(t)| &< U_T(\tilde{t}) - U_T(\hat{t}), \\
 &< 2U_T(\tilde{t}) - 2\frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W},
 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \forall t > \hat{t}, |U_T^{eq} - U_T(t)| &< 2 \left(\frac{A}{W(K_T - \mu W)} - \frac{A}{W(K_T + \mu W)} + V_{0T} \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \right) \\ &\quad - 2 \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W} + \mathcal{O}(V_{0T}^2) \\ &< 2V_{0T} \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} + \mathcal{O}(V_{0T}^2). \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, la relation (IV.32) est vérifiée avec $\eta = \varepsilon \sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}$ pour $V_{0T} > 0$.

Par conséquent, la relation (IV.32) est satisfaite pour toutes solutions d'équilibre caractérisées par $A = 0$ avec $\mu > K_T/W$ et $A > 0$, μ quelconque.

Les résultats ont été établis pour une perturbation infinitésimale. Cependant si la perturbation $V_{0T} \in]0, \eta[$, où $\eta > 0$ quelconque est défini au lemme IV.4, les lemmes IV.5, IV.6 et le corollaire IV.2 permettent de prouver l'existence d'un instant \hat{t} tel que pour tout $t > \hat{t}$, la vitesse est identiquement nulle. Par conséquent, la relation (IV.32) reste valable.

Etape 3 : On établit la relation (IV.32) pour des perturbations en vitesse normale V_{0N} satisfaisant les conditions du lemme IV.3.

On considère une position d'équilibre perturbée en vitesse normale V_{0N} compatible avec la liaison unilatérale. On suppose que cette perturbation est infinitésimale. D'après le lemme IV.1, il existe une phase de mouvement sans contact suivie d'un instant d'impact $t^{imp} > 0$. La perturbation étant suffisamment petite, l'instant d'impact sera suffisamment proche de zéro. Les relations (IV.2) donnent le mouvement sans contact :

$$\begin{aligned} U_N(t) &= \left(-\frac{a_1 \alpha_1^2 + a_2 \alpha_2^2}{2} t + V_{0N} \right) t + \mathcal{O}(t^3), \\ U_T(t) &= \left(\frac{a_1 \phi_1 \alpha_1^2 + a_2 \phi_2 \alpha_2^2}{2} \right) t^2 + U_T^{eq} + \mathcal{O}(t^3), \end{aligned}$$

les quantités a_i, α_i, ϕ_i $i = 1, 2$ étant définies au lemme IV.1. La masse entre donc en contact à l'instant $t^{imp} = -\frac{2V_{0N}}{a_1 \alpha_1^2 + a_2 \alpha_2^2}$. A cet instant, les composantes tangentielles du déplacement et de la vitesse vérifient :

$$\begin{aligned} U_T(t^{imp}) &= U_T^{eq} + \mathcal{O}(V_{0N}^2), \\ \dot{U}_T(t^{imp}) &= -2 \frac{a_1 \phi_1 \alpha_1^2 + a_2 \phi_2 \alpha_2^2}{a_1 \alpha_1^2 + a_2 \alpha_2^2} V_{0N} + \mathcal{O}(V_{0N}^2) = \gamma V_{0N} + \mathcal{O}(V_{0N}^2). \end{aligned}$$

Par conséquent, cela revient à considérer une solution d'équilibre perturbée à t^{imp} par une vitesse tangentielle $\dot{U}_T(\hat{t})$ infinitésimale. En fonction du signe de cette vitesse, l'étape 1 et l'étape 2 permettent de conclure.

Si la perturbation $V_{0N} \in]-\eta, 0[$ où le paramètre $\eta > 0$ est déterminé au lemme IV.3, l'application des lemmes (IV.3), (IV.4), (IV.5) et du corollaire (IV.2) permettent de prouver que la relation (IV.32) est satisfaite.

Au vu de la remarque faite au début de l'étape 2 concernant une position d'équilibre en contact affleurant perturbée en vitesse tangentielle V_{0T} positive, le raisonnement permettant d'obtenir la relation (IV.32) est analogue au précédent.

D'après les relations (IV.5), à l'instant d'impact t^{imp} , les composantes tangentielles du déplacement et de la vitesse sont données par :

$$\begin{aligned} U_T(t^{imp}) &= U_T^{eq} + \mathcal{O}(V_{0T}^2), \\ \dot{U}_T(t^{imp}) &= 2 \frac{\phi_T^1 \alpha_1^2 - \phi_T^2 \alpha_2^2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} V_{0T} + \mathcal{O}(V_{0T}^2) < 0. \end{aligned}$$

A partir de l'instant t^{imp} , le problème se ramène à l'étude d'une position d'équilibre perturbée avec une vitesse tangentielle $\dot{U}_T(t^{imp})$ négative. L'étape 1 permet de prouver l'existence d'un instant $\hat{t} > t^{imp}$ tel que la vitesse soit identiquement nulle pour tout $t > \hat{t}$. Il en résulte :

$$\begin{aligned} \forall t > \hat{t}, \quad |U_T^{eq} - U_T(t)| &= |U_T^{eq} - U_T(\hat{t})| < |U_T^{eq} - U_T(\tilde{t})| + |U_T(\tilde{t}) - U_T(\hat{t})| \\ &< -\dot{U}_T(\tilde{t}) \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} + \mathcal{O}(V_{0T}^2) \\ &< -2 \frac{\phi_T^1 \alpha_1^2 - \phi_T^2 \alpha_2^2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} V_{0T} + \mathcal{O}(V_{0T}^2). \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, la relation (IV.32) est vérifiée avec $\eta = \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\phi_T^2 \alpha_2^2 - \phi_T^1 \alpha_1^2} \varepsilon$ pour $V_{0T} > 0$.

Ce résultat reste valable pour des perturbations $V_{0T} \in]0, \eta[$ où l'existence de η est donnée au lemme IV.3. L'application des lemmes IV.5, IV.6 et le corollaire IV.2 montrent que la relation (IV.32) est toujours satisfaite.

Etape 4 : Conclusion :

Il existe $\eta > 0$ tel que quel que soit $\|\underline{V}_0\| < \eta$, la relation (IV.32) est vérifiée. □

Théorème IV.6

|| *L'état d'équilibre en glissement imminent positif caractérisé par $A < 0$ et $\mu > K_T/W$ est instable.*

Ce résultat a été annoncé dans les années 1990 dans [14] et repris dans [19] en 1994. Dans [19], Martins et *al* l'ont obtenu dans le cas d'une évolution quasi-statique. La démonstration repose sur la construction d'une famille de problème visqueux et d'un passage à la limite en faisant tendre la viscosité vers zéro. Une force imposée dépend du temps. Elle correspond à l'état d'équilibre en glissement imminent un instant puis est hors d'équilibre ensuite. Il existe donc un voisinage à droite de l'origine dans lequel la masse est en glissement positif puis un instant où la vitesse s'annule. A partir de cet instant, les paramètres du problème sont ceux qui caractérisent la solution décollée.

On propose ici une nouvelle preuve plus proche de ce qui vient d'être fait pour les autres cas, utilisant en particulier complètement l'intégration de la dynamique du problème (IV.1) et non un passage à la limite sur la viscosité d'un problème quasi-statique ¹.

Preuve :

On rappelle que pour $A < 0$ et $\mu > K_T/W$, il existe deux solutions d'équilibre : une en glissement imminent positif, l'autre décollée. On va montrer que la position d'équilibre en glissement imminent est instable et que la trajectoire à partir de toute perturbation de cet équilibre oscille autour de la position décollée. Le résultat d'instabilité sera obtenu dès que la relation suivante sera satisfaite :

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ et } \eta > 0, \exists |V_{0T}| < \eta, \implies |U_T^{eq} - U_T(t)| > \varepsilon.$$

Etape 1 : Suite à une perturbation initiale V_{0T} , il existe t_1^{pointe} tel que $U_T(t_1^{pointe}) = \frac{F_N}{W}$ avec $\dot{U}_T(t_1^{pointe}) > 0$.

On considère la position d'équilibre en glissement imminent positif caractérisée par $\underline{U}^{eq} = (0, \frac{F_N}{W} + \frac{R_N^{eq}}{W})$ avec $R_N^{eq} = -\frac{A}{K_T - \mu W}$ que l'on perturbe avec une vitesse tangentielle V_{0T} positive infinitésimale.

A droite de l'origine, le mouvement est décrit par le problème (IV.9) et la solution est donnée par

$$U_T(t) = \frac{V_{0T}}{2} \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} \left(e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} t} - e^{-\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} t} \right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W},$$

d'où on déduit :

$$\dot{U}_T(t) = \frac{V_{0T}}{2} \left(e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} t} + e^{-\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} t} \right) > 0.$$

¹On indique toutefois qu'un commentaire personnel de J.A.C. Martins sur ce résultat d'instabilité a joué un rôle important dans l'initiation de notre travail.

Il existe donc un instant t_1^{pointe} avec $\dot{U}_T(t_1^{pointe}) \in \left] 0, V_{0T} \sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}} t_1^{pointe} \right[$.

Le choix de V_{0T} aussi petit que l'on veut implique donc que $\dot{U}_T(t_1^{pointe})$ est également aussi petit que l'on veut.

D'après le corollaire IV.1, à droite de l'instant t_1^{pointe} , il existe une phase de mouvement sans contact puis un instant d'impact t_1^{imp} .

Etape 2 :

On montre que l'évolution de la particule comprend une succession de phases de mouvement sans contact et de phases de glissement. De plus, si t_j^{pointe} , $j = i, i + 1$ sont deux instants consécutifs tels que la réaction atteint la pointe du cône, on a $\dot{U}_T(t_{i+1}^{pointe}) < \dot{U}_T(t_i^{pointe})$.

A partir de l'instant t_1^{pointe} , l'évolution est décrite par les relations suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_N + K_N U_N + W U_T = F_N, \\ m\ddot{U}_T + W U_N + K_T U_T = F_T, \\ U_N(0) = 0, \quad U_T(0) = \frac{F_N}{W}, \\ \dot{U}_N(0) = 0, \quad \dot{U}_T(0) = \dot{U}_T(t_1^{pointe}). \end{cases} \quad (IV.37)$$

D'après le corollaire IV.1, il existe un instant d'impact t_1^{imp} . Considérons la famille de problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} m\ddot{\hat{U}}_N + K_N \hat{U}_N + W \hat{U}_T = F_N, \\ m\ddot{\hat{U}}_T + W \hat{U}_N + K_T \hat{U}_T = F_T, \\ \hat{U}_N(0) = 0, \quad \hat{U}_T(0) = \frac{F_N}{W}, \\ \hat{\dot{U}}_N(0) = 0, \quad \hat{\dot{U}}_T(0) = \zeta, \end{cases} \quad (IV.38)$$

où la quantité ζ tend vers zéro. La solution $\hat{\underline{U}}$ du problème (IV.38) converge uniformément sur tout compact de $[0, \hat{T}]$ vers la solution $\underline{\tilde{U}}$ du problème ci-dessous :

$$\begin{cases} m\ddot{\underline{\tilde{U}}}_N + K_N \underline{\tilde{U}}_N + W \underline{\tilde{U}}_T = F_N, \\ m\ddot{\underline{\tilde{U}}}_T + W \underline{\tilde{U}}_N + K_T \underline{\tilde{U}}_T = F_T, \\ \underline{\tilde{U}}_N(0) = 0, \quad \underline{\tilde{U}}_T(0) = \frac{F_N}{W}, \\ \underline{\tilde{\dot{U}}}_N(0) = 0, \quad \underline{\tilde{\dot{U}}}_T(0) = 0. \end{cases} \quad (IV.39)$$

Il en résulte que puisque $\dot{U}_T(t_1^{pointe})$ est suffisamment petit, durant la phase de mouvement sans contact, la solution \underline{U} du problème (IV.37) est proche de la solution $\underline{\tilde{U}}$ du problème (IV.39). Ainsi à l'instant d'impact t_1^{imp} , les composantes tangentielles du déplacement et de la vitesse satisfont :

$$\begin{aligned} \hat{U}_T(t_1^{imp}) &= \frac{F_N}{W} + \zeta, \\ \hat{V}_T(t_1^{imp}) &= -\dot{U}_T(t_1^{pointe}), \end{aligned}$$

ζ négatif proche de zéro. La vitesse tangentielle à l'instant t_1^{imp} étant négative, le glissement qui suit est solution de :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T + \mu W)U_T = F_T + \mu F_N, \\ U_T(0) = \frac{F_N}{W} + \zeta, \\ \dot{U}_T(0) = -\dot{U}_T(t_1^{pointe}), \end{cases}$$

soit :

$$U_T(t) = \left(\frac{A}{W(K_T + \mu W)} + \zeta \right) \cos \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} t \right) - \dot{U}_T(t_1^{pointe}) \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} \sin \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} t \right) + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}. \quad (IV.4)$$

L'expression (IV.40) montre l'existence d'un instant \hat{t}_1 tel que $\dot{U}_T(\hat{t}_1) = 0$. $\dot{U}_T(t_1^{pointe})$ étant infinitésimal, $U_T(\hat{t}_1)$ est proche de la pointe du cône. Puisqu'à cet instant il n'existe pas de position d'équilibre, la masse glisse dans l'autre sens. Durant cette seconde phase de glissement, l'évolution est donnée par :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N, \\ U_T(0) = U_T(\hat{t}_1), \\ \dot{U}_T(0) = 0, \end{cases}$$

avec

$$U_T(\hat{t}_1) = \left(\frac{A}{W(K_T + \mu W)} + \zeta \right) \cos \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} \hat{t}_1 \right) - \dot{U}_T(t_1^{pointe}) \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} \sin \left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} \hat{t}_1 \right) + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}.$$

La solution en est :

$$U_T(t) = \frac{1}{2} \left(U_T(\hat{t}_1) - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \right) \left(e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} t} + e^{-\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} t} \right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}.$$

D'où on déduit :

$$\dot{U}_T(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} \left(U_T(\hat{t}_1) - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \right) \left(e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} t} - e^{-\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} t} \right) > 0.$$

Par conséquent, il existe un instant t_2^{pointe} tel que la masse se trouve à la pointe du cône. Cet instant se caractérise par :

$$U_T(t_2^{pointe}) = \frac{F_N}{W}.$$

Soit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(U_T(\hat{t}_1) - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \right) e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} t_2^{pointe}} &= -\frac{1}{2} \left(U_T(\hat{t}_1) - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \right) e^{-\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} t_2^{pointe}} \\ &\quad + \frac{A}{W(K_T - \mu W)}. \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\dot{U}_T(t_2^{pointe}) = \sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} \left\{ \left(U_T(\hat{t}_1) - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \right) e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} t_2^{pointe}} - \frac{A}{W(K_T - \mu W)} \right\}.$$

Or t_2^{pointe} est proche de zéro et dépend de V_{0T} . Il en résulte :

$$\begin{aligned} \dot{U}_T(t_2^{pointe}) &= \sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} \left\{ U_T(\hat{t}_1) - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} - \frac{A}{W(K_T - \mu W)} \right\} + \mathcal{O}(t_2^{pointe}), \\ &< \sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}} \left\{ \frac{A}{W(K_T + \mu W)} + \zeta + \dot{U}_T(t_1^{pointe}) \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \right. \\ &\quad \left. - \frac{A}{W(K_T - \mu W)} \right\} + \mathcal{O}(V_{0T}), \\ &< \sqrt{\frac{\mu W - K_T}{K_T + \mu W}} \dot{U}_T(t_1^{pointe}) + \mathcal{O}(V_{0T}), \\ &< \dot{U}_T(t_1^{pointe}) + \mathcal{O}(V_{0T}). \end{aligned}$$

A partir de l'instant t_2^{pointe} , il suffit de continuer de façon analogue et l'on montre que les phases de mouvement sans contact et de glissement se succèdent avec $\dot{U}_T(t_{i+1}^{pointe}) < \dot{U}_T(t_i^{pointe})$.

Etape 3 : Soit t_{i+1}^{pointe} un instant tel que $U_T(t_{i+1}^{pointe}) = \frac{F_N}{W}$.

Alors

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \dot{U}_T(t_{i+1}^{pointe}) = 0.$$

D'après l'étape précédente, l'expression de la vitesse lorsque la masse se trouve à la pointe du cône satisfait pour tout $i > 1$:

$$\begin{aligned} \dot{U}_T(t_{i+1}^{pointe}) &< \sqrt{\frac{\mu W - K_T}{K_T + \mu W}} \dot{U}_T(t_i^{pointe}) + \mathcal{O}(V_{0T}), \\ &< \left(\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{K_T + \mu W}} \right)^i \dot{U}_T(t_1^{pointe}) + \mathcal{O}(V_{0T}). \end{aligned}$$

Or $\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{K_T + \mu W}} < 1$. Par conséquent, $\lim_{i \rightarrow +\infty} \dot{U}_T(t_{i+1}^{pointe}) = 0$.

Etape 4 : Conclusion :

Suite à une perturbation initiale V_{0T} positive infinitésimale, les étapes précédentes montrent

que la masse passe par une succession de phases de glissement et de mouvement sans contact. La dépendance continue par rapport aux données implique que la dynamique converge uniformément vers la solution du problème (IV.39) correspondant à la position d'équilibre décollée perturbée en déplacement. Par conséquent, quelle que soit la perturbation en vitesse tangentielle positive, la trajectoire quitte le voisinage de la position d'équilibre en glissement imminent positif pour osciller autour de la position d'équilibre décollée. Ce qui prouve le résultat d'instabilité. \square

IV.3.4 Conclusion

On souhaite insister sur trois résultats obtenus ici. Le premier est que les positions d'équilibre en glissement imminent avec une réaction non nulle sont soit stables au sens de Lyapunov soit instables, ceci dépend des paramètres du système. Le second est que l'état d'équilibre en contact affleurant, qui semble être le moins régulier, est le seul possédant la stabilité la plus forte. En effet, lorsque cet état d'équilibre est unique, il est asymptotiquement stable. En revanche, s'il coexiste avec d'autres états d'équilibres il est stable au sens de Lyapunov. Enfin, les états d'équilibre en contact bloqué sont tous stables au sens de Lyapunov. Le tableau ci-dessous résume les résultats de stabilité de tous les états d'équilibre en fonction des paramètres A et μ .

	$\mu < \frac{K_T}{W}$	$\mu = \frac{K_T}{W}$	$\mu > \frac{K_T}{W}$
$A < 0$	1 solution décollée	1 solution décollée	1 solution décollée + 1 solution en glissement imminent positif
$A = 0$	1 solution en contact affleurant	1 solution en contact affleurant + une infinité de solutions en glissement imminent positif	1 solution en contact affleurant + une infinité de solutions en contact bloqué
$A > 0$	2 solutions en glissement imminent positif et négatif + une infinité de solutions en contact bloqué	1 solution en glissement imminent négatif + une infinité de solutions en contact bloqué	1 solution en glissement imminent négatif + une infinité de solutions en contact bloqué

TAB. IV.2 – *Résultat de stabilité des positions d'équilibre en fonction des paramètres A et μ : instable ; asymptotiquement stable ; stable au sens de Lyapunov*

IV.4 Illustrations numériques

IV.4.1 Introduction

L'objectif de ce paragraphe est de compléter par une illustration les résultats théoriques de stabilité obtenus avec une application numérique utilisant la méthode "NSCD". Avant d'obtenir les résultats du paragraphe IV.3, nous avons effectué de très nombreux calculs qui au titre d'expérimentation numérique, avaient permis de formuler quelques résultats de stabilité ([5, 6]). On en présente quelques exemples ci-après au titre maintenant seulement d'illustration.

IV.4.2 Paramètres du problème

Tout d'abord, on choisit successivement un ensemble de paramètres (forces, coefficient de frottement) caractérisant les états d'équilibre (tableau IV.1). Les résultats présentés sont obtenus avec les grandeurs suivantes.

La matrice de raideur correspond à

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme force extérieure \underline{F} , on choisit :

$$\begin{cases} \underline{F} = (1, 2), & \text{dans le cas } A < 0, \\ \underline{F} = (1, 1), & \text{dans le cas } A = 0, \\ \underline{F} = (2, 1), & \text{dans le cas } A > 0. \end{cases}$$

En ce qui concerne le coefficient de frottement, on prend :

$$\begin{cases} \mu = 0.25, & \text{si } \mu < K_T/W, \\ \mu = 1, & \text{si } \mu = K_T/W, \\ \mu = 1.25, & \text{si } \mu > K_T/W. \end{cases}$$

Enfin la masse sera prise égale à 1.

IV.4.3 Stabilité des états d'équilibre

L'analyse de la stabilité a été menée pour toutes les positions d'équilibre en contact que nous avons déterminées à la proposition IV.1. Dans chacun des cas, on étudie la dynamique issue de données voisines de la position d'équilibre correspondant. Tous les calculs ont été effectués avec des perturbations dans l'espace des phases classiques $(\underline{U}, \underline{\dot{U}})$.

Deux situations sont observées :

- soit on trouve une donnée initiale, une perturbation de l'équilibre, telle qu'après un temps fini ou asymptotiquement en temps, on observe une divergence entre la dynamique et l'équilibre.
- soit on ne trouve pas de telle perturbation, ce qui suggère que le système est stable au sens de Lyapunov ou asymptotiquement stable .

IV.4.3.1 Le cas $A < 0$

Lorsque la quantité A est strictement négative, le système possède toujours une solution décollée. Le système dynamique se réduit à un système d'équations différentielles du second ordre. On a ainsi l'avantage de déterminer analytiquement la solution et d'analyser sa stabilité avec des outils standards. Cet exemple est important puisqu'il permet d'apprécier le caractère non-dissipatif de l'algorithme mis en oeuvre et la fiabilité de l'analyse de stabilité.

En effet, la solution approchée obtenue avec la méthode "NSCD" pour une θ -Euler-méthode est similaire à la solution exacte (figure IV.5). En ce qui concerne l'analyse de la stabilité, la méthode numérique donne un résultat visiblement très proche de la solution exacte.

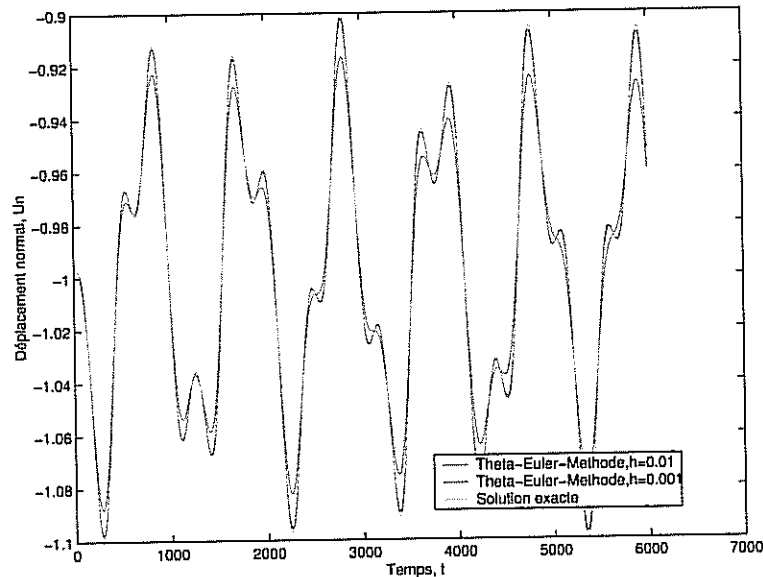
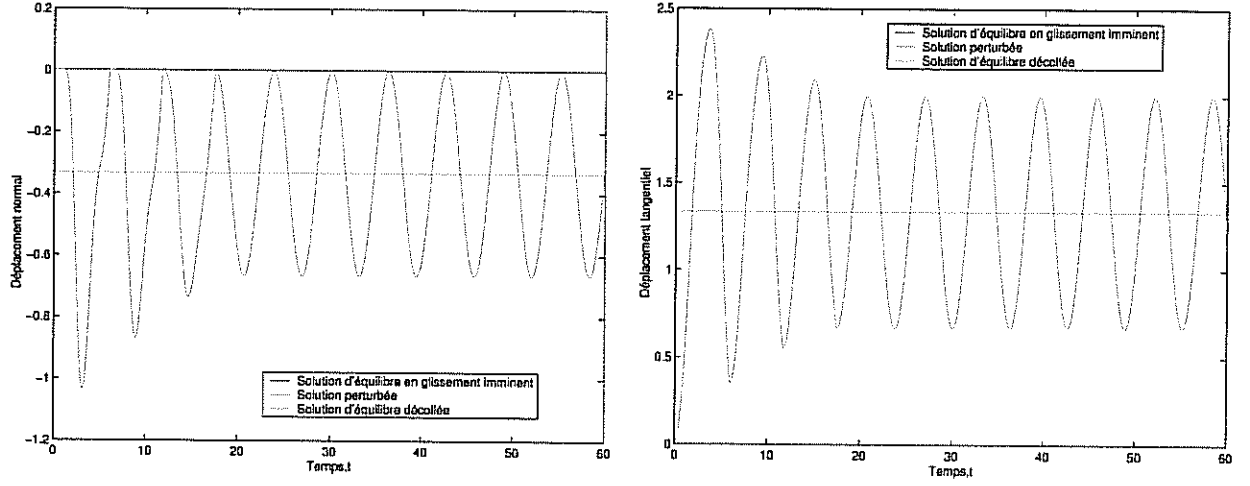


FIG. IV.5 – Solution exacte et solutions approchées calculées pour différentes valeur du pas

Si $\mu > K_T/W$, le système a, en plus de la solution d'équilibre décollée, une solution d'équilibre en glissement imminent positif.

On perturbe la position d'équilibre par des données de Cauchy dans l'espace des phases classiques. L'équilibre est caractérisé par $(U_N^{eq} = 0, U_T^{eq} = 0, R_N^{eq} = -4, R_T^{eq} = -5)$. On observe sur la figure IV.6 la dynamique dont les conditions initiales sont $(U_N(0) = U_N^{eq}, U_T(0) = U_T^{eq}, \dot{U}_N(0) = 0, \dot{U}_T(0) = V_{0T})$. Une trajectoire qualitativement identique s'obtient pour des perturbations en vitesse aussi petite soient-elles. Le système quitte le voisinage de la solution d'équilibre en glissement imminent et oscille après un temps fini autour de la solution décollée.



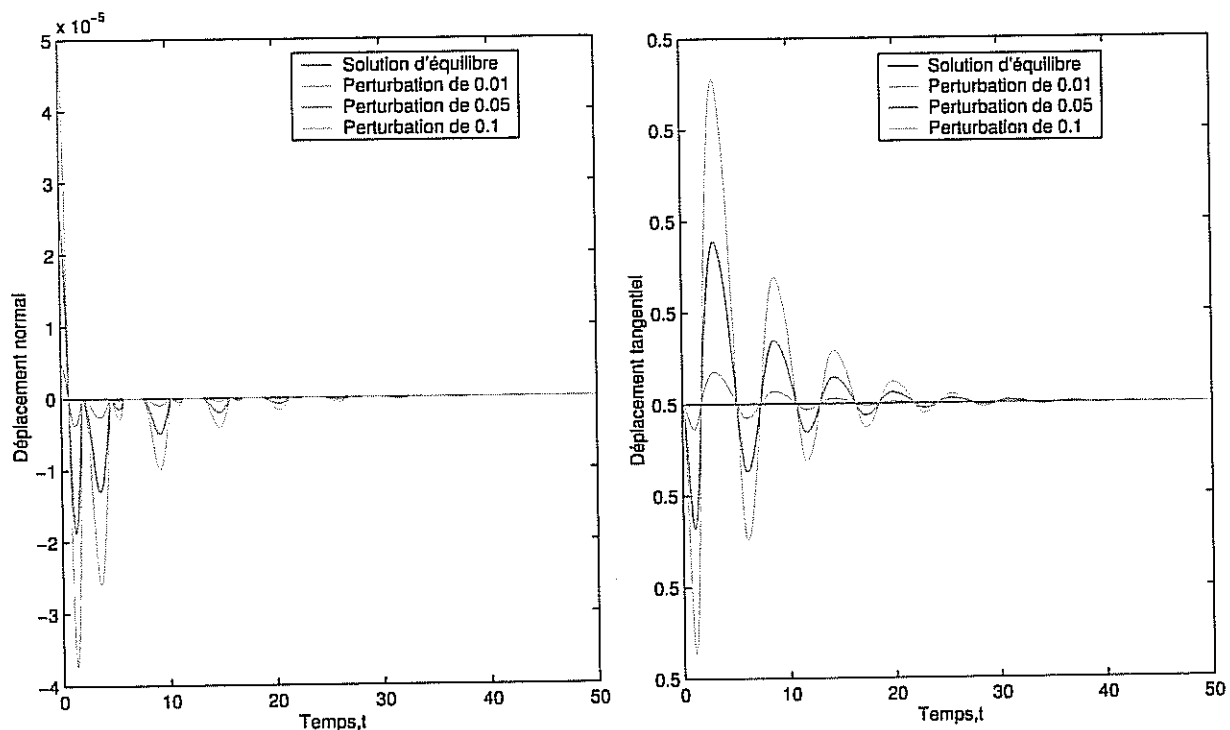
(a) Evolution du déplacement normal

(b) Evolution du déplacement tangentiel

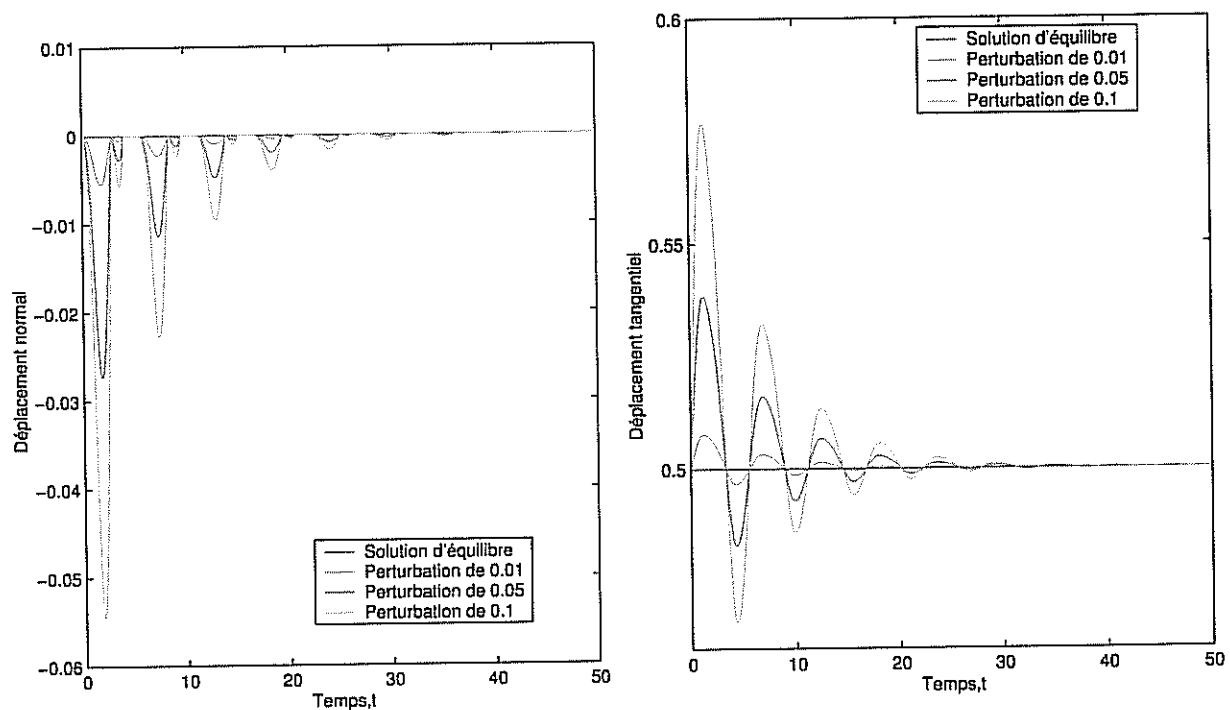
FIG. IV.6 – *Instabilité de la position d'équilibre en glissement imminent positif pour $A < 0$ et $\mu > K_T/W$*

IV.4.3.2 Le cas $A = 0$

Si $\mu < K_T/W$, il existe une unique position d'équilibre en contact affleurant. La position d'équilibre est définie par $(U_N^{eq} = 0, U_T^{eq} = 0.5, R_N^{eq} = 0, R_T^{eq} = 0)$. Les courbes IV.7.a et IV.7.b montrent la dynamique pour des données initiales $(U_N(0) = 0, U_T(0) = U_T^{eq}, \dot{U}_N(0) = V_{0N}, \dot{U}_T(0) = 0)$ prenant successivement les valeurs $V_{0N} = 0.1; 0.05; 0.01$ puis $(U_N(0) = 0, U_T(0) = U_T^{eq}, \dot{U}_N(0) = 0, \dot{U}_T(0) = V_{0T})$ prenant successivement les valeurs $V_{0T} = 0.1; 0.05; 0.01$. Toutes les combinaisons de perturbations $(U_{0N}, U_{0T}, V_{0N}, V_{0T})$ donnent un résultat qualitatif similaire. La solution en contact affleurant est donc bien numériquement observée asymptotiquement stable.



(a) Perturbation $V_{0N} < 0$



(b) Perturbation $V_{0T} < 0$

FIG. IV.7 – Stabilité asymptotique de la pointe du cône pour $A = 0$ et $\mu < K_T/W$

Si $\mu = K_T/W$, l'ensemble des états d'équilibre correspond à la demi-droite du bord gauche du cône de Coulomb. Tous ces états en glissement imminent positif sont instables hormis la pointe du cône correspondant également à un état de glissement mais avec une réaction nulle qui est observée asymptotiquement stable lors de l'exploration numérique.

Considérons une position en glissement imminent positif ($U_N^{eq} = 0, U_T^{eq} = 0, R_N^{eq} = -1, R_T^{eq} = -1$). La figure IV.8 donne la trajectoire obtenue pour des données initiales ($U_N(0) = 0, U_T(0) = U_T^{eq}, \dot{U}_N(0) = 0, \dot{U}_T(0) = V_{0T}$) qui s'éloigne de l'état initial pour s'arrêter sur la pointe du cône. Ce résultat est observé pour une perturbation V_{0T} aussi petite que l'on veut.

A l'inverse, pour toutes données initiales situées dans le voisinage de la pointe du cône, l'écart entre la trajectoire et l'équilibre ($U_N^{eq} = 0, U_T^{eq} = 0.5, R_N^{eq} = 0, R_T^{eq} = 0$) tend vers 0 (figure IV.9).

D'après les théorèmes IV.3 et IV.6, la pointe du cône est stable au sens de Lyapunov et tous les autres états d'équilibre sont instables. La seule observation numérique suggérait que la pointe du cône est asymptotiquement stable. Cette différence est vraisemblablement due aux erreurs d'arrondis puisque tous les états d'équilibre situés dans un voisinage de la pointe du cône sont instables.

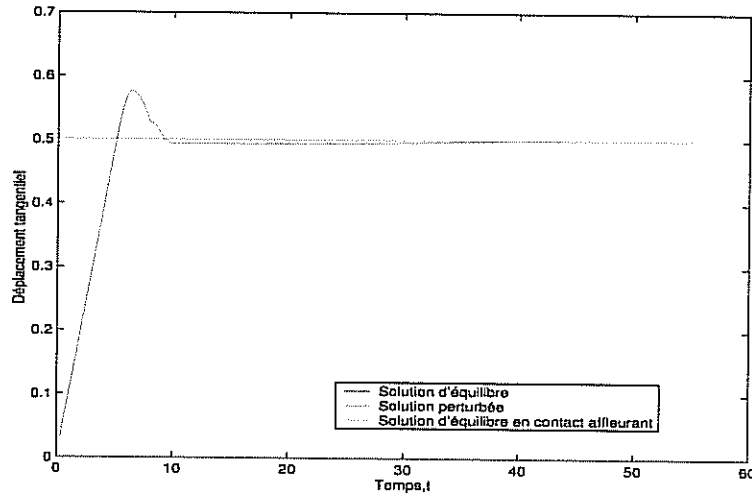
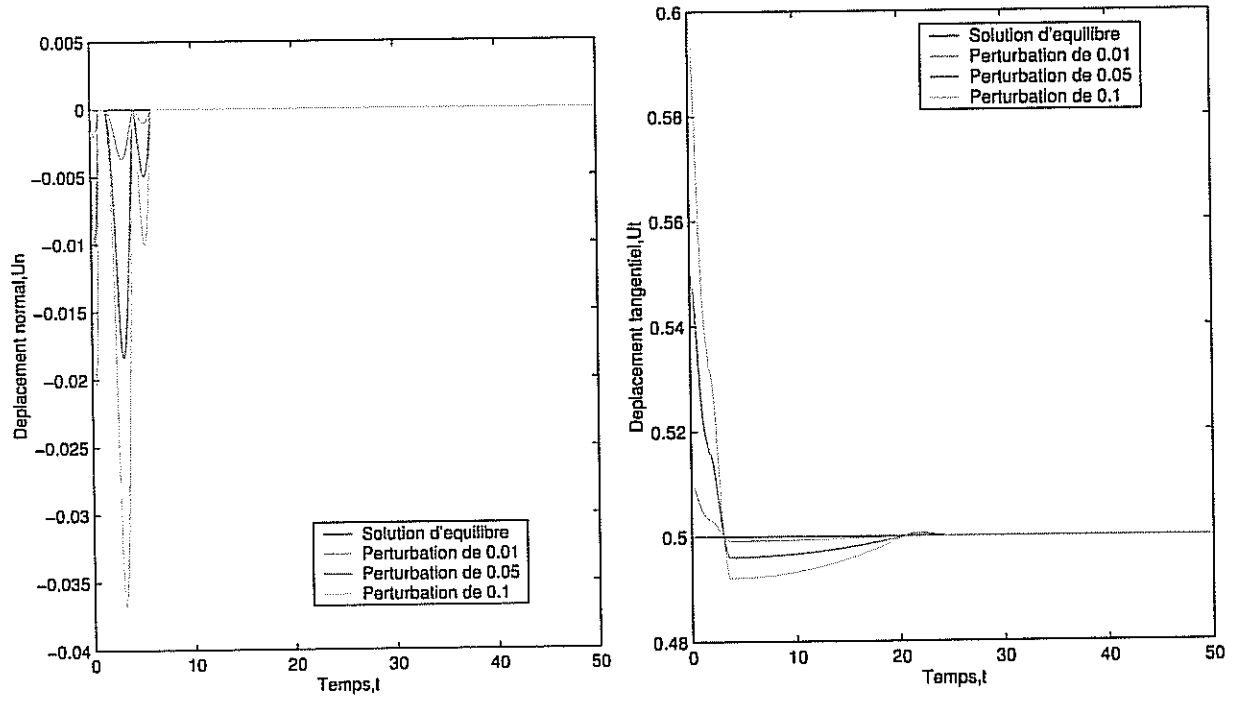
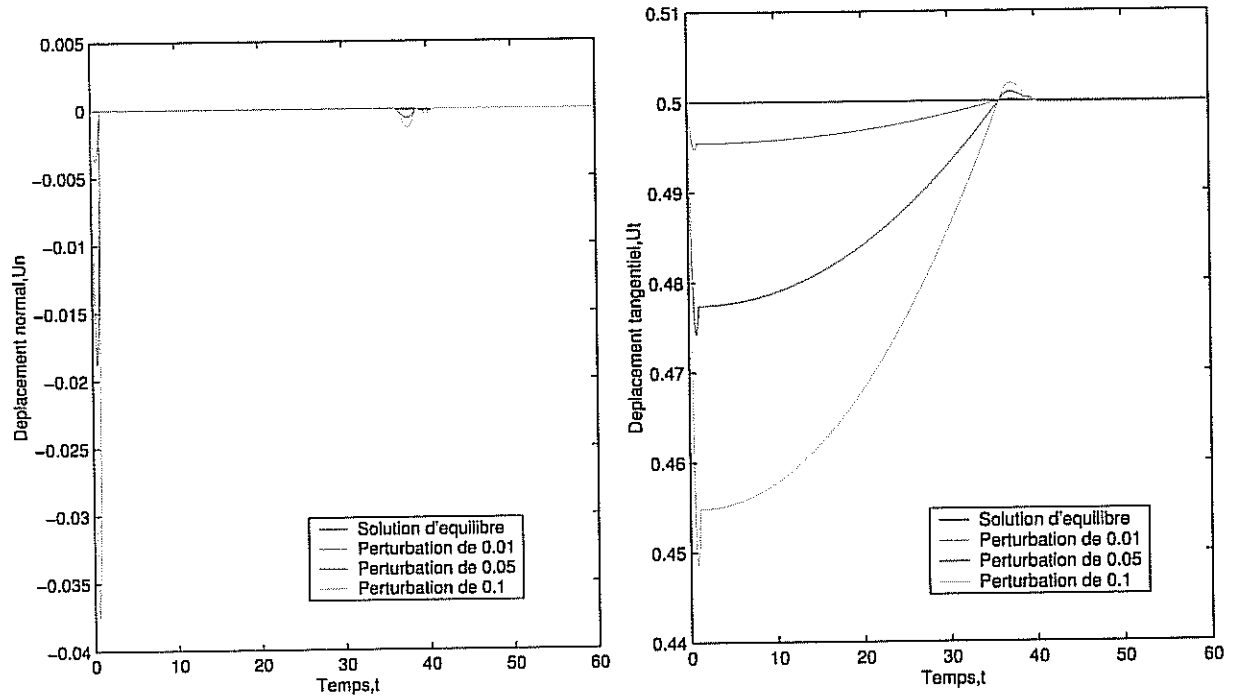


FIG. IV.8 – Instabilité d'état d'équilibre en glissement imminent pour $A = 0$ et $\mu = K_T/W$



(a) Perturbation $V_{0N} < 0$



(b) Perturbation $V_{0T} > 0$

FIG. IV.9 – Stabilité asymptotique de la pointe du cône pour $A = 0$ et $\mu = K_T/W$

Enfin, si $\mu > K_T/W$, tous les états d'équilibre sont en contact bloqué, mis à part la pointe du cône de Coulomb, et sont stables au sens de Lyapunov. Quel que soit le type de perturbation, la dynamique observée pour la solution d'équilibre en glissement imminent ($U_N^{eq} = 0, U_T^{eq} = 0.5, R_N^{eq} = 0, R_T^{eq} = 0$) est qualitativement identique. Les figures IV.10.a (respectivement b) ont été obtenues pour des perturbations en déplacement tangentiel et en vitesse tangentielle de 0.1; 0.05; 0.01 (respectivement des perturbations en déplacement normal et en vitesse de 0.1; 0.05; 0.01).

La dynamique de l'état en contact bloqué ($U_N^{eq} = 0, U_T^{eq} = 0.1, R_N^{eq} = -0.8, R_T^{eq} = -1$) est représentée sur la figure IV.11.a pour des perturbations en vitesse tangentielle

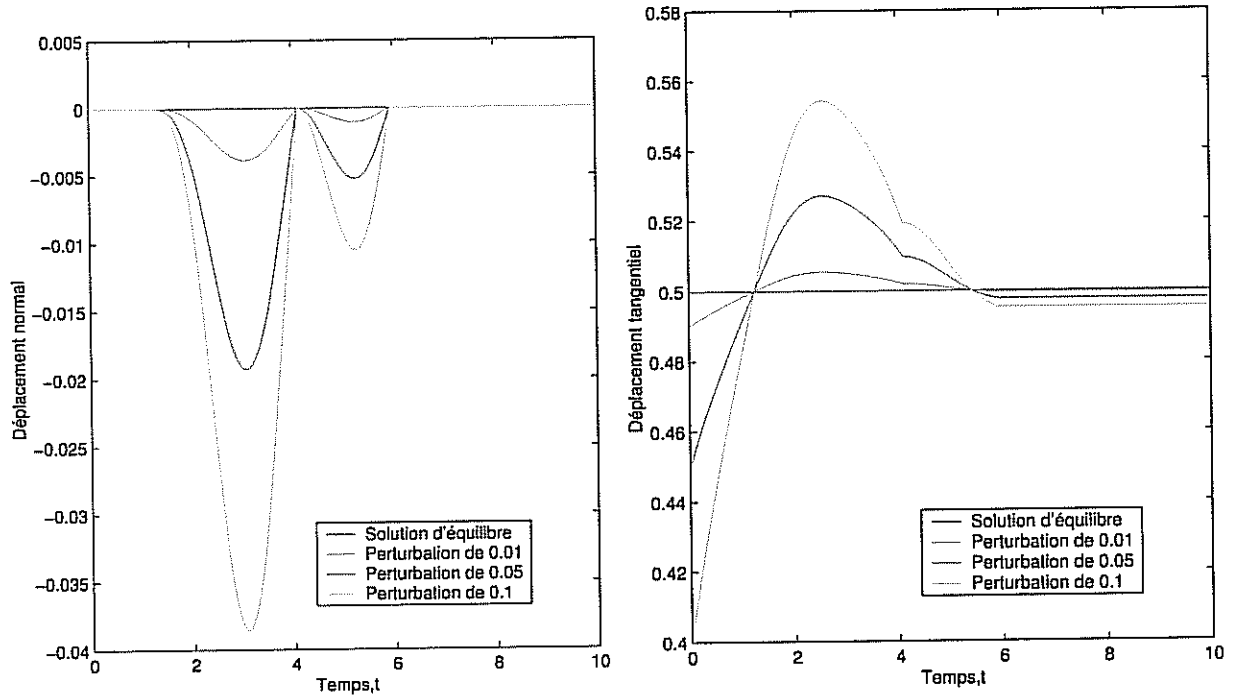
$V_{0T} = -0.2; -0.1; 0.1; 0.2$. La figure IV.11.b permet de visualiser la dynamique dans le plan $\{R_T, R_N\}$ pour une perturbation en vitesse tangentielle 0.2. L'état final correspond à un état d'équilibre appartenant à l'ensemble des états d'équilibre pour les paramètres initiaux. On obtient des résultats identiques pour tout type de perturbation.

IV.4.4 Le cas $A > 0$

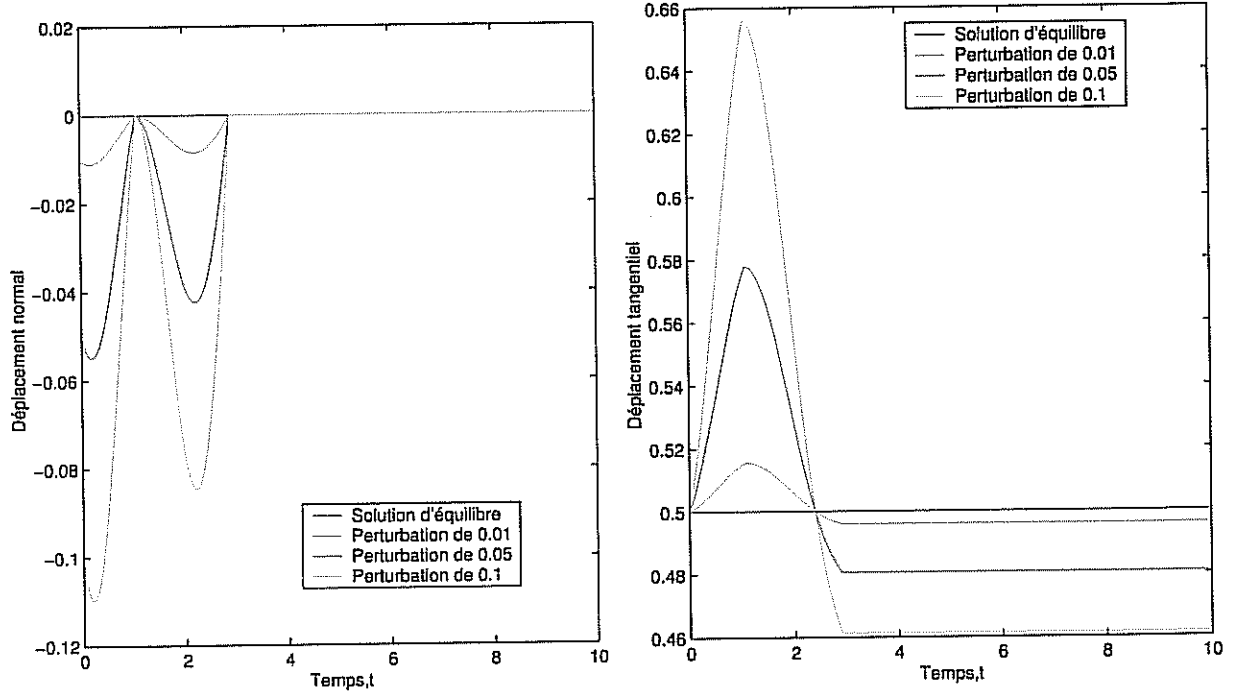
Quand la quantité A est strictement positive, l'ensemble des états d'équilibre correspond dans le plan $\{R_T, R_N\}$ à un segment ouvert d'états de contact bloqué avec une ou deux positions en glissement imminent. L'expérimentation numérique montre également que ces états sont toujours stables au sens de Lyapunov.

Quel que soit le type de perturbation, la dynamique est qualitativement identique à la figure IV.12.a. Ces résultats sont obtenus pour une position d'équilibre ($U_N^{eq} = 0, U_T^{eq} = 0.4, R_N^{eq} = -1.6, R_T^{eq} = 0.4$) en contact bloqué que nous perturbons pour différentes valeurs de la vitesse tangentielle. La figure IV.12.b représente la dynamique de la position d'équilibre bloquée ($U_N^{eq} = 0, U_T^{eq} = 0.75, R_N^{eq} = -1.25, R_T^{eq} = 0.75$) pour des perturbations en vitesse tangentielle. On obtient des courbes analogues à cette figure pour les autres positions d'équilibre en glissement imminent.

Il est également intéressant de visualiser la dynamique dans le plan $\{R_T, R_N\}$ sur les figures IV.14 pour des perturbations en vitesse tangentielle de la position d'équilibre. L'état initial de la figure IV.14.a ($U_N^{eq} = 0, U_T^{eq} = 0.9, R_N^{eq} = -1.1, R_T^{eq} = 0.9$) correspond à un état de contact bloqué. On perturbe cette position avec $V_{0T} = 0.2$. La dynamique de la position d'équilibre en glissement négatif ($U_N^{eq} = 0, U_T^{eq} = 1.2, R_N^{eq} = -0.8, R_T^{eq} = 0.2$) successivement perturbée avec $V_{0T} = -0.2$ puis $V_{0T} = 0.2$ peut être visualisée sur les figures IV.14.b et c. Ces figures permettent d'observer l'influence des perturbations, et en particulier le lien entre les sauts de réaction et le signe des perturbations initiales. On constate également que la trajectoire s'arrête sur une position d'équilibre correspondant à l'ensemble des états d'équilibre caractérisée par les mêmes valeurs de A et μ .



(a) Perturbation $U_{0T} < 0, V_{0T} > 0$



(b) Perturbation $U_{0N} < 0, V_{0N} < 0, V_{0T} > 0$

FIG. IV.10 – *Stabilité de Lypunov de la pointe du cône pour $A = 0$ et $\mu > K_T/W$*

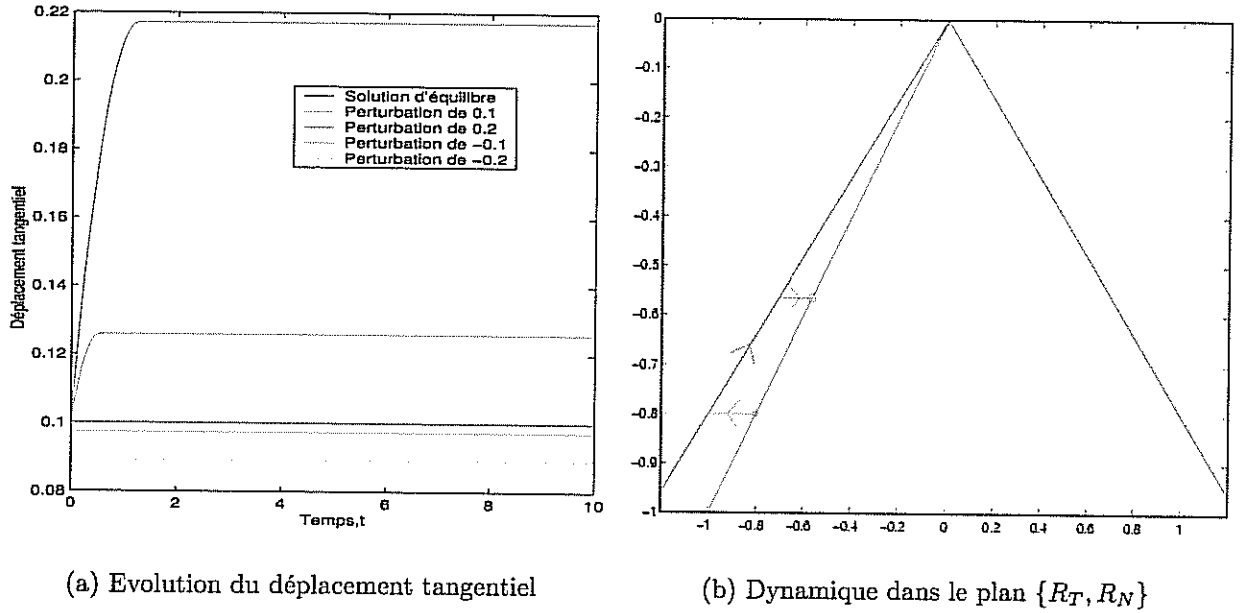


FIG. IV.11 – *Stabilité de Lypunov d'une solution d'équilibre en contact bloqué suite à une perturbation en vitesse tangentielle positive $A = 0$ et $\mu > K_T/W$*

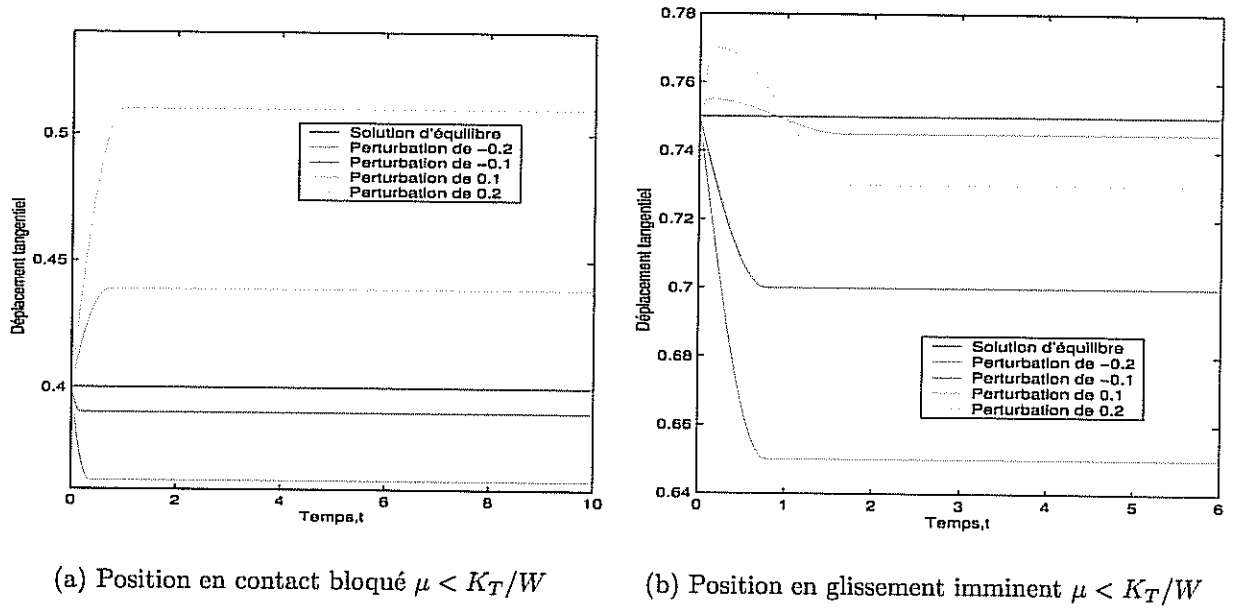


FIG. IV.12 – *Stabilité des états d'équilibre : $A > 0$*

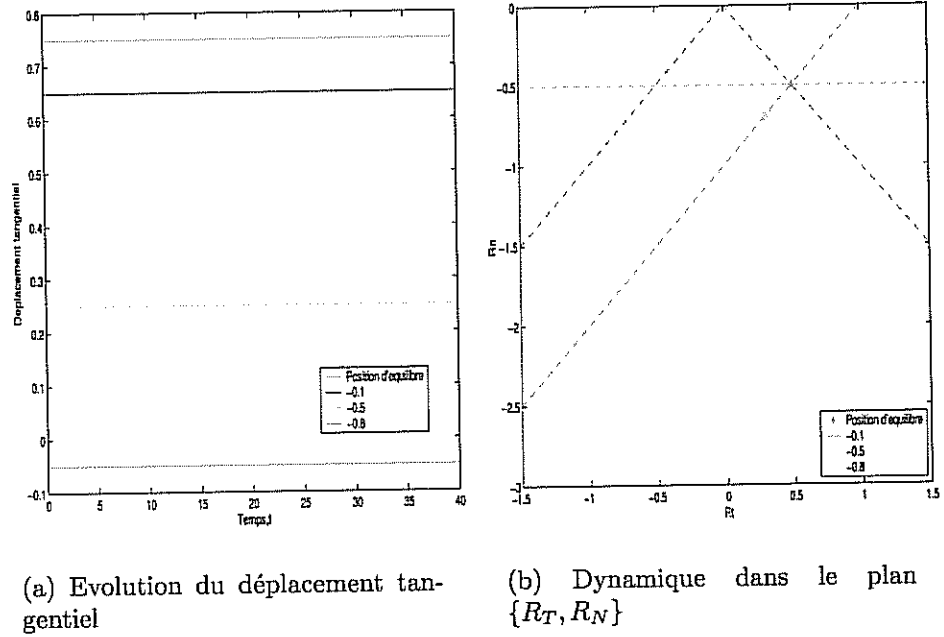


FIG. IV.13 – Stabilité d'une position d'équilibre en contact bloqué suite à une perturbation : $U_{0T} < 0$, $A > 0$ $\mu = K_T/W$

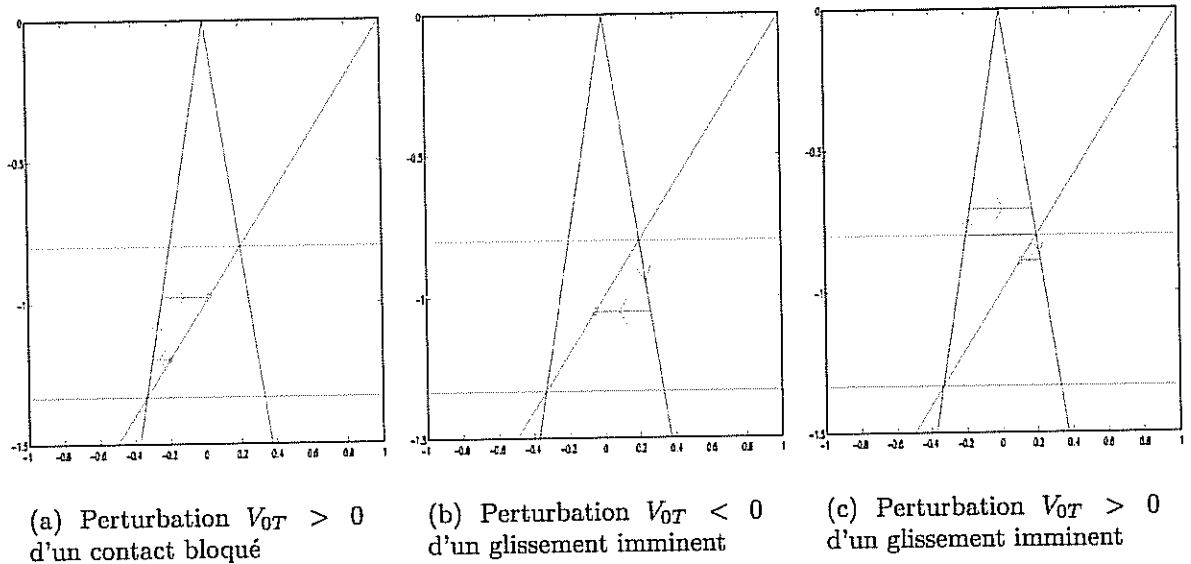


FIG. IV.14 – Influence des trajectoires en fonction des données initiales dans le plan $\{R_T, R_N\}$

IV.5 Vers de nouvelles notions de stabilité

IV.5.1 Introduction

L'idée de nouvelles caractéristiques des systèmes dynamiques tels que \mathcal{P}_u est issue de remarques faites par J.J. Moreau et M. Jean. S'agissant ici d'une discussion sur la stabilité, illustrons ces notions par des commentaires sur des résultats de calculs numériques présentés au paragraphe précédent. On observe qu'il est possible de perturber un état d'équilibre en contact bloqué par un déplacement fini sans que cette perturbation des données de Cauchy, ne soit suivie d'un mouvement (figure IV.13). On a simplement amené le système sur un autre état d'équilibre. D'autre part, on peut modifier les forces, également sans modifier l'équilibre tel que décrit dans un espace de phases classiques. Enfin, on observe que des perturbations en vitesse, aussi petites que l'on veut, peuvent intuitivement exiger des forces aussi grandes que l'on veut (figure IV.14). Le fait que des petites perturbations des vitesses puissent exiger des sauts de réaction tangentielle très grands, alors que des perturbations finies de forces extérieures puissent ne pas modifier l'équilibre, a donc conduit à introduire de nouvelles notions de stabilité. On va dans ce qui suit présenter ces notions puis montrer quelques résultats.

IV.5.2 Définitions

On perturbe les données du problème (IV.1) qui devient :

\mathcal{P}'_u : Trouver $\underline{U} \in MMA([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^2)$ et $\underline{R} \in \mathcal{M}([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^2)$ tels que :

$$\begin{aligned} \underline{U}(0) &= \underline{U}_0, \quad \dot{\underline{U}}^+(0) = \underline{V}_0, \\ m\ddot{\underline{U}} + \underline{K}\underline{U} &= \underline{F} + \varepsilon \underline{\xi} + \underline{R}, \\ U_N &\leq 0, \quad R_N \leq 0, \quad U_N R_N = 0, \\ \forall V \in \mathcal{C}^0([0, \hat{T}]; \mathbb{R}), \quad &\int_{[0, \hat{T}]} \langle R_T, V - \dot{U}_T^+ \rangle - \mu R_N (|V| - |\dot{U}_T^+|) \geq 0, \\ U_N(t) = 0 &\implies \dot{U}_N^+(t) = 0. \end{aligned} \tag{IV.41}$$

\underline{F} est la donnée constante du problème (IV.1), ε est un petit paramètre, $\underline{\xi}$ est une force que l'on choisit analytique. On sait alors que le problème (IV.41) est bien posé (cf chapitre III).

Le problème (IV.1) est le problème (IV.41) à $\underline{\xi} = 0$. On sait donc qu'il existe des états d'équilibre de (IV.41) à $\underline{\xi} = 0$.

Définition IV.1 Stabilité eu égard aux bruits

On dit que le repos \underline{U}^{eq} est stable eu égard au bruit, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que le repos \underline{U}^{eq} correspondant au problème (IV.1) soit un repos pour le problème (IV.41).

Définition IV.2 Coulomb stabilité

On dit qu'un état d'équilibre est Coulomb stable si la réaction correspondante \underline{R}^{eq} est située strictement à l'intérieur du cône de Coulomb.

IV.5.3 Nouveaux résultats de stabilité

On obtient tout d'abord le résultat suivant :

Proposition IV.2

|| Un état d'équilibre est Coulomb stable si et seulement si il est stable eu égard au bruit.

Les outils utilisés pour démontrer la proposition IV.2 sont élémentaires et purement géométriques. L'originalité vient de la nouvelle notion de stabilité.

Preuve :

Soit \underline{U}^{eq} une solution *Coulomb stable*. Montrons que cette solution est stable eu égard au bruit.

Comme il s'agit d'une solution Coulomb stable, les résultats obtenus dans la proposition IV.1 qui donnent l'ensemble des états d'équilibre en fonction des paramètres, permettent de dire que soit A est nul avec un coefficient de frottement strictement supérieur à K_T/W , soit A est strictement positif avec un coefficient de frottement quelconque.

On se fixe une valeur de la réaction normale R_N^{eq} dans l'ensemble des réactions admissibles et on associe le déplacement \underline{U}^{eq} . Dire que $(\underline{U}^{eq}, \underline{R}^{eq})$ est stable eu égard au bruit signifie qu'il existe $\underline{\xi}$ tel que $(\underline{U}^{eq}, \underline{R}^{eq})$ soit simultanément un état d'équilibre de (IV.1) et de (IV.41).

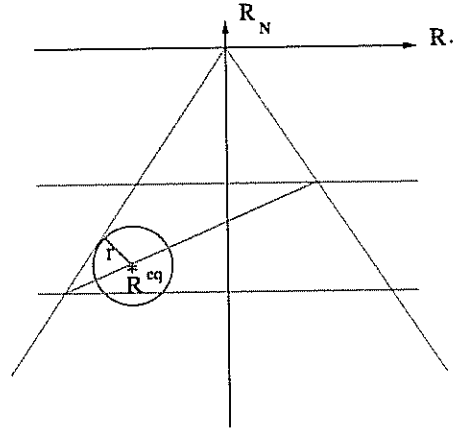


FIG. IV.15 – Exemple de recherche de ε pour $A > 0$, $\mu < K_T/W$.

La réaction normale correspondant à la valeur \underline{U}^{eq} pour le problème statique associé à (IV.41) est donnée par :

$$\underline{K} \underline{U}^{eq} = \underline{F} + \underline{R} + \varepsilon \underline{\xi}(t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U_N^{eq} = 0, \\ U_T^{eq} = \frac{F_N + R_N^{eq}}{W}. \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} R_N(t) = R_N^{eq} - \varepsilon \xi_N(t), \\ R_T(t) = R_T^{eq} - \varepsilon \xi_T(t). \end{cases} \quad (\text{IV.42})$$

Il est alors immédiat qu'il existe r_{max} tel que la boule $(\underline{R}^{eq}, r_{max})$ (ici un cercle situé dans le plan $\{R_T, R_N\}$) soit contenue strictement à l'intérieur du cône de Coulomb.

Le rayon en est donné par :

$$r_{max}^2 = \min(\min_{R_N < 0}(f^-(R_N)), \min_{R_N < 0}(f^+(R_N))),$$

avec

$$\begin{cases} f^-(R_N) = (R_N - R_N^{eq})^2 + (\mu R_N - (\frac{A}{W} + \frac{K_T}{W} R_N^{eq}))^2, \\ f^+(R_N) = (R_N - R_N^{eq})^2 + (-\mu R_N - (\frac{A}{W} + \frac{K_T}{W} R_N^{eq}))^2. \end{cases}$$

Les réactions doivent alors satisfaire :

$$(R_N(t) - R_N^{eq})^2 + (R_T(t) - R_T^{eq})^2 < r_{max}^2, \quad \forall t,$$

soit d'après (IV.42),

$$r_{max}^2 > \varepsilon^2 \left\{ \left(1 + \left(\frac{K_T}{W} - 1\right)^2 \xi_N(t)^2 + \xi_T(t)^2 - 2\left(\frac{K_T}{W} - 1\right) \xi_N(t) \xi_T(t)\right) \right\}.$$

La fonction ξ étant analytique sur $[0, \hat{T}]$, il existe pour tout t des constantes M_N, M_T, Min_N et Min_T telles que :

$$\forall t \in [0, \hat{T}], \quad \begin{cases} |\xi_N(t)| \leq M_N, \\ |\xi_T(t)| \leq M_T. \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_N^2(t) < Min_N, \\ \xi_T^2(t) < Min_T. \end{cases}$$

Il existe donc ε , tel que

$$\varepsilon < \frac{r_{max}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{K_T}{W} - 1\right)^2 Min_N + Min_T - 2\left(\frac{K_T}{W} - 1\right) M_N M_T\right)}}.$$

Si une solution \underline{U}^{eq} est Coulomb stable, elle est stable eu égard au bruit.

Réciproquement, on suppose que \underline{U}^{eq_1} est *stable eu égard au bruit*. Montrons alors que cette position est *Coulomb stable*.

Par définition, \underline{U}^{eq_1} est solution du problème

$$\begin{aligned} \underline{K} \underline{U}^{eq_1} &= \underline{F} + \underline{R}^{eq_1}, \\ \begin{cases} U_N^{eq_1} \leq 0, \quad R_N^{eq_1} \leq 0, \quad R_N^{eq_1} U_N^{eq_1} = 0, \\ |R_T^{eq_1}| \leq -\mu R_N^{eq_1}, \end{cases} \end{aligned}$$

et aussi solution du problème

$$\begin{aligned} \underline{K} \underline{U}^{eq_1} &= \underline{F} + \varepsilon \underline{\xi} + \underline{R}^{eq_2}, \\ \begin{cases} U_N^{eq_1} \leq 0, \quad R_N^{eq_2} \leq 0, \quad R_N^{eq_2} u_N^{eq_1} = 0, \\ |R_T^{eq_2}| \leq -\mu R_N^{eq_2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Supposons que \underline{U}^{eq_1} ne soit pas Coulomb stable. Alors par définition, soit $|R_T^{eq_1}| = -\mu R_N^{eq_1}$, soit $\underline{R}^{eq_1} = 0$ d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} \text{si } R_T^{eq_1} &= -\mu R_N^{eq_1}, & \varepsilon(\xi_T - \xi_N) + (R_T^{eq_2} - \mu R_N^{eq_2}) &= 0, \\ \text{si } R_T^{eq_1} &= \mu R_N^{eq_1}, & \varepsilon(\xi_T + \xi_N) + (R_T^{eq_2} + \mu R_N^{eq_2}) &= 0, \\ \text{si } \underline{R}^{eq_1} &= 0, & \varepsilon(\xi_T + \xi_N) + (R_T^{eq_2} + \mu R_N^{eq_2}) &= 0. \end{aligned}$$

On peut toujours trouver une perturbation $\underline{\xi}$ telle que $R_T^{eq_2} - \mu R_N^{eq_2} > 0$ et $R_T^{eq_2} + \mu R_N^{eq_2} > 0$. Les réactions sont alors à l'extérieur du cône de Coulomb. D'où une contradiction. Ainsi si \underline{U}^{eq_1} est stable eu égard au bruit, elle est Coulomb stable. \square

On énonce maintenant un résultat de stabilité, issu des définitions précédentes, et qualitativement différent de ceux énoncés aux théorèmes IV.1-IV.6 où l'on perturbait des données de Cauchy classiques.

Théorème IV.7

|| S'il existe un repos Coulomb stable alors la dynamique à partir de tous les états d'équilibre non-affleurants conduit à un repos Coulomb stable.

Preuve :

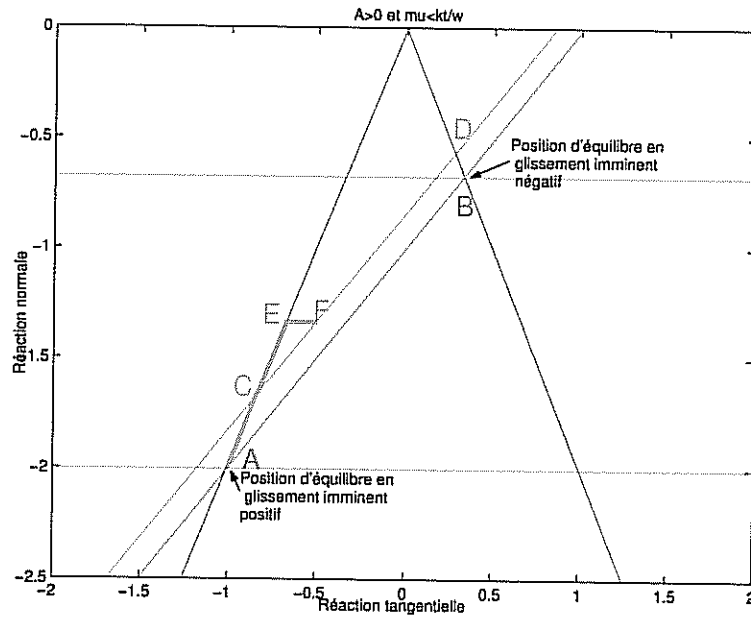
Si la position d'équilibre considérée est Coulomb stable, le résultat a été démontré dans la proposition IV.2. De plus s'il existe un repos Coulomb stable alors il existe également une position en glissement imminent (proposition IV.1). Il ne reste par conséquent à étudier que le cas où la solution d'équilibre n'est pas Coulomb stable, c'est-à-dire est en glissement imminent caractérisé par une quantité A strictement positive.

La démarche est la suivante. On part d'une solution d'équilibre en glissement imminent du problème (IV.1) que l'on considère comme donnée initiale du problème (IV.41). On souhaite montrer qu'il existe un $\varepsilon > 0$ et un temps \hat{t} tels que pour tout $t > \hat{t}$ la réaction est strictement à l'intérieur du cône de Coulomb. Afin de prouver l'existence de cet instant, on utilise l'algorithme "NSCD" considéré comme un système dynamique discret. La proposition IV.2 permettra de conclure pour le système discret et le résultat de convergence obtenu au paragraphe III.5 permettra de conclure que ce résultat passe à la limite sur le problème continu.

On expose tout d'abord, à titre de motivation, le cas où la perturbation $\varepsilon \underline{\xi}$ est constante. Les calculs peuvent dans ce cas être effectués analytiquement complètement.

1.) Cas d'une force $\underline{\xi}$ constante :

A titre de motivation, on présente le cas d'une perturbation de l'équilibre par une force constante. On présente sur la figure IV.16 l'évolution à partir de la position d'équilibre en glissement imminent positif suite à une perturbation en force $\varepsilon \underline{\xi}$, où on choisit un paramètre ε suffisamment petit. La position d'équilibre initiale est représentée par le point A. L'ensemble des positions d'équilibre correspondant à la donnée \underline{F} du problème (IV.1) est la droite $[A, B]$ et l'ensemble des états d'équilibre correspondant au chargement $\underline{F} + \varepsilon \underline{\xi}$ est représenté par la droite $[C, D]$. La solution du problème (IV.41) comprend donc d'abord un glissement dans lequel la réaction va du point A au point E et passe par le point C avec une vitesse maximale. Sa vitesse ne s'annule qu'au point E qui n'est pas une position d'équilibre. On a donc un saut de réaction tangentielle. La particule est alors strictement à l'intérieur du cône de Coulomb (point F) et le lemme IV.5 permet de conclure.


 FIG. IV.16 – Position d'équilibre : $A > 0, \mu < K_T/W$.

Cela se vérifie simplement. Le mouvement à partir de A est décrit par :

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = (F_T + \varepsilon \xi_T) - \mu(F_N + \varepsilon \xi_N), \\ U_T(0) = U_T^{eq} = \frac{F_T + \mu R_N^{eq}}{K_T} = \frac{F_N + R_N^{eq}}{W}, \\ \dot{U}_T(0) = 0, \end{cases}$$

avec $R_N^{eq} = -\frac{A}{K_T - \mu W}$.

On note par la suite $G_N = F_N + \varepsilon \xi_N$ et $G_T = F_T + \varepsilon \xi_T$. La solution est :

$$U_T(t) = \frac{\varepsilon(\mu \xi_N - \xi_T)}{K_T - \mu W} \cos\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}t\right) + \frac{G_T - \mu G_N}{K_T - \mu W}.$$

La phase de glissement s'arrête à l'instant $\hat{t} = \sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}}\pi$. ε étant choisi suffisamment petit, il existe \tilde{R}^{eq} tel que $\underline{R}(\hat{t}) = \tilde{R}^{eq}$. Le lemme IV.5 permet de conclure.

On remarque que la vitesse est maximale à l'instant $t = \sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}} \frac{\pi}{2}$. La réaction vaut alors

$$\begin{cases} R_N(\hat{t}) = -\frac{\tilde{A}}{K_T + \mu W}, \\ R_T(\hat{t}) = \mu R_N(\hat{t}), \end{cases}$$

avec $\tilde{A} = K_T(F_N + \varepsilon \xi_N) - W(F_T + \varepsilon \xi_T)$. Ce qui correspond aux coordonnées du point E.

Le résultat est le même pour une position d'équilibre en glissement imminent négatif que l'on perturbe avec une force $\varepsilon \underline{\xi}$.

2.) *Cas d'une force $\underline{\xi}$ analytique :*

Comme on l'a fait précédemment, on fixe le pas de temps h , et on considère les itérés successifs de l'algorithme utilisé dans la méthode "NSCD" comme un système dynamique discret. On choisit alors une perturbation telle que l'on soit initialement en glissement, et on montre qu'il existe un temps au bout duquel la dynamique entre à l'intérieur de la boucle de contact bloqué. D'après le tableau II.1, on doit donc montrer qu'il existe un incrément $i \in \mathbb{N}$ tel que les relations ci-dessous soit satisfaites :

$$\begin{cases} \tilde{F}_T^{i+1} - \mu \tilde{F}_N^{i+1} < 0, \\ \tilde{F}_T^{i+1} + \mu \tilde{F}_N^{i+1} > 0. \end{cases}$$

La proposition IV.2 permet ensuite de conclure qu'il suffit de choisir ε suffisamment petit pour que le système reste à l'équilibre.

Tout d'abord, on considère la position d'équilibre en glissement imminent positif. On rappelle que cette position est caractérisée par une quantité A strictement positive et un coefficient de frottement strictement inférieur à K_T/W . On a :

$$\underline{U}^{eq} = \left(0, \frac{F_T + \mu R_N^{eq}}{K_T} = \frac{F_N + R_N^{eq}}{W} \right), \quad R_N^{eq} = -\frac{A}{K_T - \mu W}.$$

On choisit une perturbation de cet équilibre par une force extérieure $\varepsilon \underline{\xi}$ conduisant à une phase de glissement positif.

Il s'agit alors de montrer qu'il existe un incrément i tel que le glissement cesse, c'est-à-dire qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ vérifiant :

$$\tilde{F}_T^{i+1} - \mu \tilde{F}_N^{i+1} < 0. \tag{IV.43}$$

On a :

$$\begin{aligned}\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} &= m\dot{U}_T^i - h(K_T - \mu W)U_T^i + h(F_T - \mu F_N) + \frac{\varepsilon h}{2}(\xi_T^{i+1} + \xi_T^i - \mu(\xi_N^{i+1} + \xi_N^i)), \\ &= m\dot{U}_T^i - h(K_T - \mu W)U_T^{eq} + h(F_T - \mu F_N) + h^2(\mu W - K_T) \sum_{j=2}^i \dot{U}_T^j \\ &\quad + \frac{\varepsilon h}{2}(\xi_T^{i+1} + \xi_T^i - \mu(\xi_N^{i+1} + \xi_N^i)).\end{aligned}$$

Or ,

$$\begin{aligned}(K_T - \mu W)U_T^{eq} &= K_T \left(\frac{F_T}{K_T} - \frac{\mu A}{K_T(K_T - \mu W)} \right) - \mu W \left(\frac{F_N}{W} - \frac{A}{W(K_T - \mu W)} \right) \\ &= -(F_T - \mu F_N).\end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} = m\dot{U}_T^i + h^2(\mu W - K_T) \sum_{j=2}^i \dot{U}_T^j + \frac{\varepsilon h}{2}(\xi_T^{i+1} + \xi_T^i - \mu(\xi_N^{i+1} + \xi_N^i)).$$

D'après le chapitre II, lemme II.2, la vitesse est bornée. Il existe deux constantes positives Min et Max telles que pendant le glissement positif on ait $Min \leq \dot{U}_T^j \leq Max$, $j = 2, \dots, i$. La force $\underline{\xi}$ étant analytique sur $[0, \hat{T}]$ on a deux constantes M_N, M_T telle que $|\xi_N| \leq M_N$ et $|\xi_T| \leq M_T$. Ainsi,

$$\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} \leq \underbrace{mMax + h^2(\mu W - K_T)(i-1)Min + \varepsilon h(M_T + \mu M_N)}_{\kappa^+}.$$

L'inégalité (IV.43) est vérifiée si la quantité κ^+ est négative, à savoir si l'incrément i satisfait,

$$i > 1 + \frac{\varepsilon h(M_T + \mu M_N) + mMax}{Minh^2(K_T - \mu W)}.$$

De plus, en choisissant le paramètre ε suffisamment petit tel que $\varepsilon < \frac{2\mu A}{(K_T - \mu W)(M_T + \mu M_N)}$, le déplacement tangentiel à l'itéré i vérifie $U_T^i < \frac{F_N}{W} - \frac{A}{W(K_T + \mu W)}$. Il en résulte :

$$\begin{aligned}\tilde{F}_T^{i+1} + \mu\tilde{F}_N^{i+1} &= m\dot{U}_T^i - h(K_T + \mu W)U_T^i + h(F_T + \mu F_N) + \frac{\varepsilon h}{2}(\xi_T^{k+1} + \xi_T^k + \mu(\xi_N^{k+1} + \xi_N^k)), \\ &> mMin - \frac{2h\mu A}{K_T - \mu W}.\end{aligned}$$

h étant choisi suffisamment petit, le signe de $\tilde{F}_T^{i+1} + \mu\tilde{F}_N^{i+1}$ est positif. Par conséquent, à l'itéré $i+1$, on entre dans la boucle de contact.

On considère ensuite les positions d'équilibre en glissement imminent négatif caractérisées par une quantité A strictement positive. On a

$$\underline{U}^{eq} = \left(0, \frac{F_T - \mu R_N^{eq}}{K_T} \right) = \left(0, \frac{F_N + R_N^{eq}}{W} \right), \quad R_N^{eq} = -\frac{A}{K_T + \mu W}.$$

Suite à cette perturbation, la particule est en glissement négatif. Comme précédemment, la vitesse étant bornée, il existe deux constantes positives \min et \max telles que pendant le glissement négatif on ait $-\min \leq \dot{U}_T^j \leq -\max$, $j = 2, \dots, i$. Le glissement cesse si il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\tilde{F}_T^{i+1} + \mu \tilde{F}_N^{i+1} > 0. \quad (\text{IV.44})$$

On a :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_T^{i+1} + \mu \tilde{F}_N^{i+1} &= m\dot{U}_T^i - h(K_T + \mu W)U_T^i + h(F_T + \mu F_N) + \frac{\varepsilon h}{2}(\xi_T^{i+1} + \xi_T^i + \mu(\xi_N^{i+1} + \xi_N^i)), \\ &= m\dot{U}_T^i - h(K_T + \mu W)U_T^{eq} + h(F_T + \mu F_N) + h^2(\mu W - K_T) \sum_{j=2}^i \dot{U}_T^j \\ &\quad + \frac{\varepsilon h}{2}(\xi_T^{i+1} + \xi_T^i + \mu(\xi_N^{i+1} + \xi_N^i)), \\ &= m\dot{U}_T^i + h^2(\mu W - K_T) \sum_{j=2}^i \dot{U}_T^j + \frac{\varepsilon h}{2}(\xi_T^{i+1} + \xi_T^i + \mu(\xi_N^{i+1} + \xi_N^i)), \\ &> \underbrace{-m \min + h^2(\mu W + K_T)(i-1)\max - \varepsilon h(M_T + \mu M_N)}_{\kappa^-}. \end{aligned}$$

L'inégalité (IV.44) est vérifiée si la quantité κ^- est positive, à savoir si l'incrément i satisfait,

$$i > \frac{\varepsilon h(M_T + \mu M_N) + m \min}{h^2(K_T + \mu W)\max} + 1,$$

Si $\mu < K_T/W$, on choisit ε suffisamment petit tel que $\varepsilon < \frac{2\mu A}{(K_T + \mu W)(M_T + \mu M_N)}$, le déplacement tangentiel à l'itéré i vérifie $U_T^i > \frac{F_N}{W} - \frac{A}{W(K_T - \mu W)}$. Il vient :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_T^{i+1} - \mu \tilde{F}_N^{i+1} &< -h(K_T + \mu W)U_T^i + h(F_T + \mu F_N) + h\varepsilon(M_T + \mu M_N), \\ &< -m\max + \frac{2h\mu A}{K_T + \mu W}. \end{aligned}$$

h étant choisi suffisamment petit, le signe de $\tilde{F}_T^{i+1} - \mu \tilde{F}_N^{i+1}$ est négatif. Par conséquent, à l'itéré $i+1$, on entre dans la boucle de contact.

Si $\mu = K_T/W$,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_T^{i+1} - \mu \tilde{F}_N^{i+1} &< -\frac{hA}{W} + h\varepsilon(M_T + \mu M_N), \\ &< h \left(-\frac{A}{W} + \varepsilon(M_T + \mu M_N) \right). \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir ε suffisamment petit tel que $\varepsilon < \frac{A}{W(M_T + \mu M_N)}$ pour que la quantité $\tilde{F}_T^{i+1} - \mu \tilde{F}_N^{i+1}$ soit négative.

Si $\mu > K_T/W$,

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_T^{i+1} - \mu \tilde{F}_N^{i+1} &< -h(K_T + \mu W)U_T^i + h(F_T + \mu F_N) + \frac{\varepsilon h}{2}(\xi_T^{i+1} + \xi_T^i + \mu(\xi_N^{i+1} + \xi_N^i)), \\
 &< -h(K_T + \mu W) \left(\frac{F_N}{W} - \frac{A}{W(K_T + \mu W)} \right) + h(F_T + \mu F_N) + h\varepsilon(M_T + \mu M_N), \\
 &< h \left(\frac{2A\mu}{K_T + \mu W} + \varepsilon(M_T + \mu M_N) \right).
 \end{aligned}$$

En prenant ε suffisamment petit tel que $\varepsilon < \frac{2A\mu}{(K_T + \mu W)(M_T + \mu M_N)}$, la quantité $\tilde{F}_T^{i+1} - \mu \tilde{F}_N^{i+1}$ est négative.

Conclusion

Il existe donc un numéro d'itéré $i \in \mathbb{N}$ pour lequel la vitesse est nulle et la réaction normale est égale à celle d'un état d'équilibre du problème (IV.41). La masse entre strictement à l'intérieur du cône de Coulomb. Le résultat de convergence précédent permet ensuite d'énoncer que ce résultat ne dépend pas du pas de temps. La proposition IV.2 permet ensuite de conclure que si ε est choisi suffisamment petit, le système reste à l'équilibre. \square

IV.5.4 Illustrations numériques

IV.5.4.1 Introduction

On présente la trajectoire dans le plan $\{R_T, R_N\}$ ainsi que l'évolution du déplacement tangentiel pour une perturbation des forces, conformément à la notion de stabilité eu égard au bruit, introduite au paragraphe IV.5. On rappelle que cette notion est définie pour des états d'équilibre en contact non-affleurant caractérisés par $A = 0$ avec $\mu > K_T/W$ et $A > 0$. On teste dans ce qui suit le calcul numérique du résultat de stabilité énoncé au théorème IV.7. On présente uniquement les résultats obtenus pour les positions d'équilibre en glissement imminent. Dans un premier temps, la perturbation est une force constante. Ensuite, on choisit comme perturbation une fonction analytique du temps.

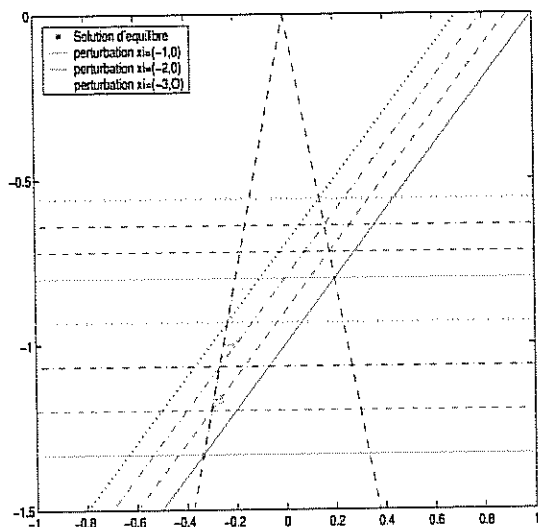
IV.5.4.2 Force constante

La perturbation de l'état d'équilibre correspond à une force constante $\varepsilon \underline{\xi}$ prenant successivement les valeurs $\underline{\xi}$ égale à $(-1, 0)$, $(-2, 0)$ et $(-3, 0)$ si il s'agit de la position d'équilibre en glissement imminent positif, $(0, -1)$, $(0, -2)$, $(0, -3)$, pour la position d'équilibre en glissement imminent négatif. La paramètre ε est égal à 0.1.

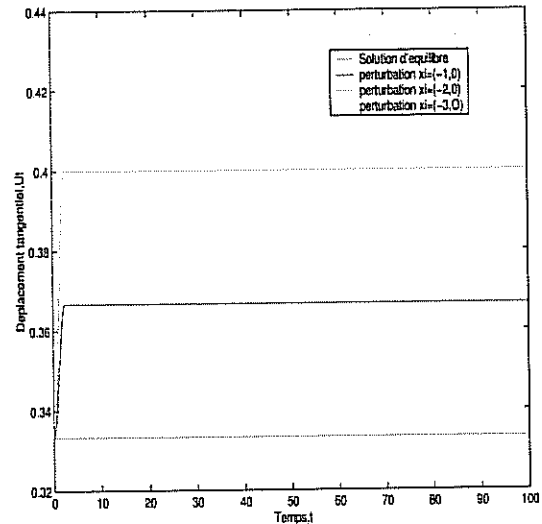
L'ensemble des états d'équilibre correspondant à un chargement $\underline{F} + \varepsilon \underline{\xi}$ est représenté en fonction de la valeur de $\underline{\xi}$ par l'intersection des droites rouges avec le domaine admissible des réactions correspondant. La dynamique dans le plan $\{R_T, R_N\}$ est représentée en rose, cyan et jaune en fonction de la valeur de la perturbation (figures IV.17.a et IV.18.a).

Les figures IV.17 (respectivement IV.18) présentent l'évolution de la position d'équilibre en glissement imminent positif ($U_N^{eq} = 0, U_T^{eq} = 0.33, R_N^{eq} = -1.34, R_T^{eq} = -1.59$) (respectivement négatif ($U_N^{eq} = 0, U_T^{eq} = 0.75, R_N^{eq} = -0.5, R_T^{eq} = 0.5$)) caractérisée par $A > 0, \mu < K_T/W$ (respectivement $A > 0, \mu = K_T/W$) suite à une perturbation en force $\varepsilon \underline{\xi}$. Au bout

d'un temps fini, le mouvement s'arrête sur un état Coulomb stable représenté par le symbole \circ correspondant à une position d'équilibre du système soumis à la force $\underline{F} + \varepsilon \underline{\xi}$. L'écart entre la solution perturbée et la solution d'équilibre est donc constant au bout d'un temps fini (figures IV.17.b IV.18.b).

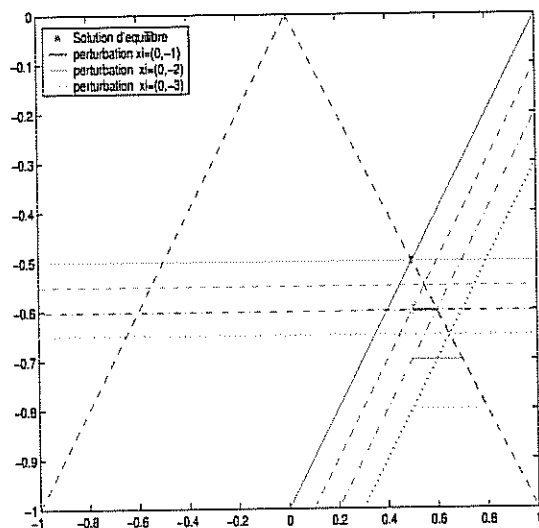


(a) Dynamique dans le plan $\{R_T, R_N\}$

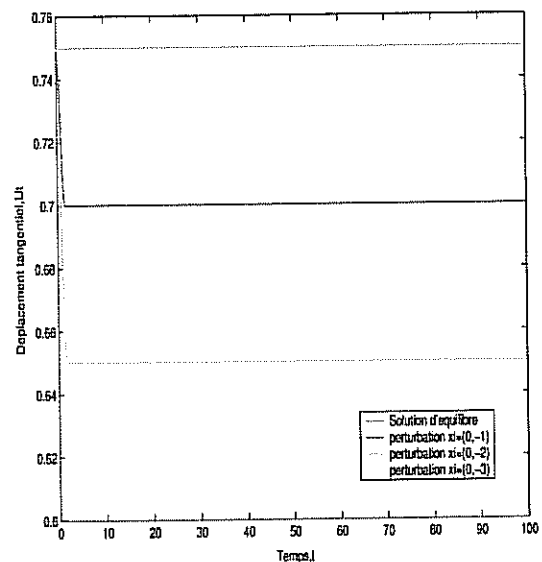


(b) Evolution du déplacement tangentiel

FIG. IV.17 – *Stabilité eu égard au bruit de la position d'équilibre en glissement imminent positif pour $A > 0$ et $\mu < K_T/W$*



(a) Dynamique dans le plan $\{R_T, R_N\}$



(b) Evolution du déplacement tangentiel

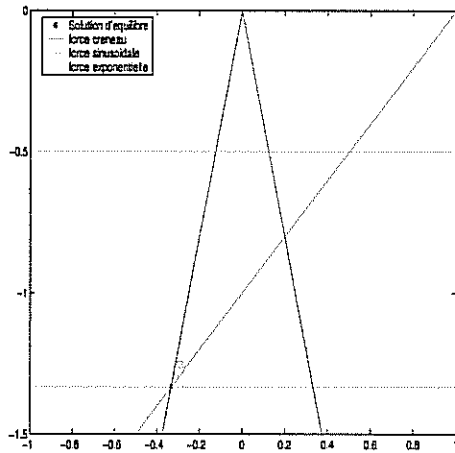
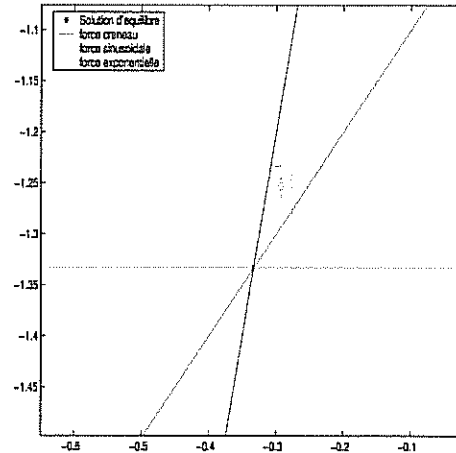
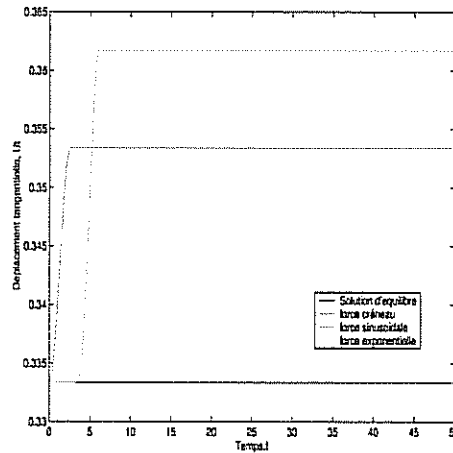
FIG. IV.18 – *Stabilité eu égard au bruit de la position d'équilibre en glissement imminent négatif pour $A > 0$ et $\mu = K_T/W$*

IV.5.4.3 Force analytique ou analytique par morceaux

A présent, on perturbe une position d'équilibre en glissement imminent par une force extérieure $\varepsilon \underline{\xi}$. On choisit comme perturbation des positions d'équilibre en glissement imminent positif et négatif trois forces $\underline{\xi}$ dont la composante normale est une fonction créneau, une fonction sinusoïdale, une force exponentielle et dont la composante tangentielle est la fonction identiquement nulle. Le paramètre ε est pris égal à 0.1.

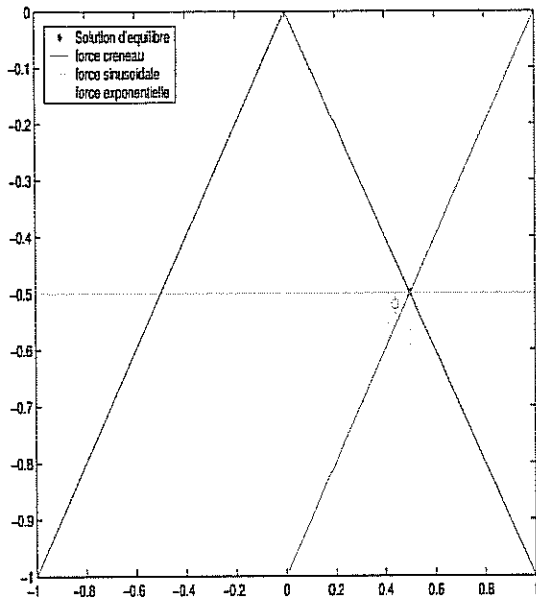
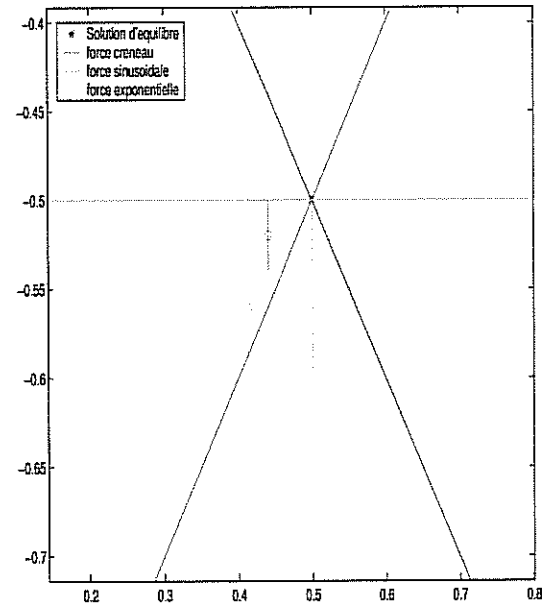
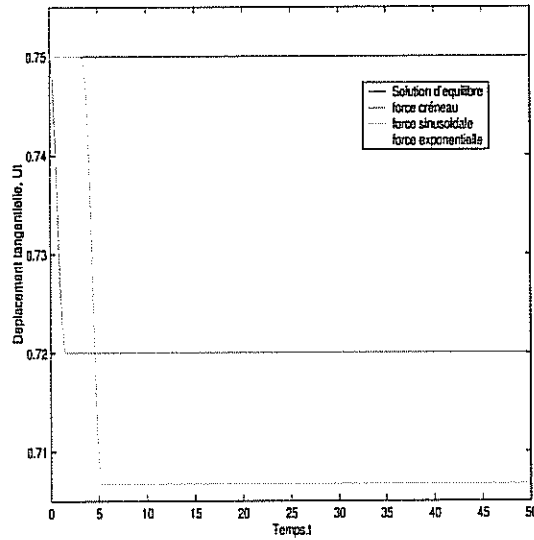
Les figures IV.19 (respectivement IV.20) présentent l'évolution de la position d'équilibre en glissement imminent positif ($U_N^{eq} = 0, U_T^{eq} = 0.33, R_N^{eq} = -1.33, R_T^{eq} = -0.33$) (respectivement négatif ($U_N^{eq} = 0, U_T^{eq} = 0.75, R_N^{eq} = -0.5, R_T^{eq} = 0.5$)) caractérisée par $A > 0, \mu < K_T/W$ (respectivement $A > 0, \mu = K_T/W$) suite à une perturbation en force $\varepsilon \underline{\xi}$.

Au bout d'un temps fini, l'écart entre l'état d'équilibre et la trajectoire est constant pour chaque perturbation, et la réaction est alors strictement à l'intérieur du cône de frottement en un état Coulomb stable.

(a) Dynamique dans le plan $\{R_T, R_N\}$ (b) Zoom de la dynamique dans le plan $\{R_T, R_N\}$ 

(c) Evolution du déplacement tangentiel

FIG. IV.19 – Stabilité eu égard au bruit de la position d'équilibre en glissement imminent positif pour $A > 0$ et $\mu < K_T/W$


 (a) Dynamique dans le plan $\{R_T, R_N\}$

 (b) Zoom de la dynamique dans le plan $\{R_T, R_N\}$


(c) Evolution du déplacement tangentiel

 FIG. IV.20 – Stabilité eu égard au bruit de la position d'équilibre en glissement imminent négatif pour $A > 0$ et $\mu = K_T/W$

CONCLUSION

L'objectif de ce travail était l'étude de la stabilité des états d'équilibre d'un système simple en présence de contact unilatéral et de frottement de Coulomb.

On a tout d'abord obtenu un résultat d'existence lorsque les données sont des fonctions intégrables en adaptant simplement une preuve donnée par Monteiro-Marques. On a pour cela construit une suite d'approximations compatible avec la méthode "NonSmooth Contact Dynamics" et montré que l'on pouvait en extraire une sous-suite convergeant vers une solution du problème continu. On rappelle que les arguments utilisés, "extraction de sous-suites" et "la limite est solution du problème continu", fournissent l'existence mais pas l'unicité. On a donc abordé la question de l'unicité dans le chapitre suivant, en montrant que la solution n'est unique que si les données sont analytiques, et qu'en particulier il n'y a pas d'unicité même avec des données C^∞ . Une conséquence de ce résultat est la convergence de l'algorithme "NonSmooth Contact Dynamics" dans le cas où les données sont analytiques.

Sachant sous quelles conditions la dynamique est bien posée, toute la suite a été consacrée à la stabilité des états d'équilibre. L'ensemble de ces états d'équilibre a été déterminé en fonction des paramètres du système. Ensuite, la stabilité a été étudiée par intégration directe de la dynamique à partir de données voisines de l'équilibre.

On insiste sur trois aspects qualitatifs des résultats de stabilité obtenus :

- les positions d'équilibre en glissement imminent ayant une réaction non nulle sont soit stables, soit instables. Ceci dépend des paramètres du système ;
- le seul état d'équilibre asymptotiquement stable est l'état d'équilibre en contact affleurant et ceci seulement lorsqu'il est l'unique solution d'équilibre. S'il coexiste avec d'autres états d'équilibre, il est stable au sens de Lyapunov ;
- tous les états d'équilibre en contact bloqué sont stables au sens de Lyapunov.

Enfin, l'observation de la dynamique dans l'espace des réactions, nous a conduit à introduire deux nouvelles notions de stabilité avec lesquelles on a montré, sous certaines conditions, que la dynamique à partir d'un état d'équilibre perturbé par une force analytique pas trop grande conduit toujours à un nouvel état d'équilibre en contact bloqué.

Bibliographie

- [1] **P. Ballard**
The Dynamics of Discrete Mechanical Systems with Perfect Unilateral Constraints
Arch. Rational. Mech. Anal, 154 (2000), pp. 199–274.
- [2] **P. Ballard et S. Basseville**
Existence and uniqueness for dynamical unilateral contact with Coulomb friction : A model problem
Mathematical Modelling and Numerical Analysis, (2004), p. à paraître.
- [3] **S. Barbarin**
Instabilité et frottement en élasticité : Application à un problème d’ondes de contraintes
Thèse de mécanique, Université d’Aix-Marseille II, 1997.
- [4] **J. Bass**
Cours de Mathématiques
Masson, Paris, 1971.
- [5] **S. Basseville, A. Léger, J. A. C. Martins, et E. Pratt**
Ensemble des états d’équilibre et stabilité pour un modèle simple avec contact unilatéral et frottement de Coulomb
Actes du sixième colloque national en calcul des structures, II (2003), pp. 345–352.
- [6] **S. Basseville, A. Léger, et E. Pratt**
Investigation of the Equilibrium States and of their Stability for a Simple Model with Unilateral Contact and Coulomb Friction
Archive of Applied Mechanics, 73 (2003), pp. 409–420.
- [7] **X. Chateau**
Sur quelques problèmes liés à la modélisation mécanique de l’emboutissage
Thèse de mécanique, Ecole Polytechnique, 1992.
- [8] **X. Chateau et Q.S. Nguyen**
Buckling of Elastic Structures in Unilateral Contact with or without Friction
Eur.J.Mech.A/Solids, 10 (1) (1991), pp. 71–89.
- [9] **A. Pinto Da Costa**
Instabilidades e Bifurcações em Sistemas de Comportamento Não-Suave
Thèse de mécanique, Universidade Técnica de Lisboa, 2001.

- [10] **G. Duvaut et J.L. Lions**
Les inéquations en mécanique et en physique
Dunod, Paris, 1972.
- [11] **R. Hill**
A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids
J.Mech.Phys.Solids, 6 (1958), pp. 236–249.
- [12] **R. Hill**
Some Basic Principles in the Mechanics of Solids without a Natural Time
J.Mech.Phys.Solids, 7 (1959), pp. 209–245.
- [13] **M. Jean**
The Non-Smooth Contact Dynamics Method
Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 177 (1999), pp. 235–257.
- [14] **A. Klarbring**
Examples of Non-Uniqueness and Non-Existence of Solutions to Quasistatic Contact Problems with Friction
Ing.Arch, 60 (1990), pp. 529–541.
- [15] **J.A.C. Martins, S. Barbarin, M. Raous, et A. Pinto Da Costa**
Dynamic Stability of Finite Dimensional Linearly Elastic Systems with Unilateral Contact and Coulomb Friction
Comp.Meth.App.Mech.Engn, 177 (1999), pp. 289–328.
- [16] **J.A.C. Martins et A. Pinto Da Costa**
Stability of Finite-Dimensional Nonlinear Elastic Systems with Unilateral Contact and Friction
Int.J.Sol.Struc, 37 (2000), pp. 2519–2564.
- [17] **J.A.C. Martins et M. Raous**
Friction and Instabilities
CISM Courses and Lectures NO 457, Springer Wien New York, 2002.
- [18] **J. A. C. Martins, M. Raous, et D. Vola**
Friction and Instability of Steady Sliding Squeal of a Rubber/Glass Contact
Int. J. Num. Meth. Engn., 46 (1999), pp. 1699–1720.
- [19] **J. A .C. Martins, F. M. F. Simoes, F. Gastaldi, et M. D. P. Monteiro Marques**
Dissipative Graph Solutions For 2 Degree-of-Freedom Quasistatic Frictional Contact Problem
Int. J. Engng. Sci, 33 (1995), pp. 1959–1986.
- [20] **F. Moirrot**
Etude de la stabilité d'un état d'équilibre en présence de frottement de Coulomb
Thèse de mécanique, Ecole Polytechnique, 1998.

- [21] **M.D.P. Monteiro-Marques**
Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems, Shocks and Dry Friction
Birkhäuser, Basel. Boston. Berlin, 1993.
- [22] **J.J. Moreau**
Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité
C.R. Acad Sci, Paris, sér A, 271 (1970), pp. 608–611.
- [23] **J.J. Moreau**
Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints
(G. Del. Piero and F. Maceri Eds, Springer-Verlag, Wien-New-York, 1983.
- [24] **J.J. Moreau**
Unilateral Contact and dry friction in finite freedom dynamics
Nonsmooth Mechanics and Applications, CISM, Courses and lectures No 302 (J.J Moreau and P. D. Panagiotopoulos Eds), Springer-Verlag, Wien-New-York, (1988), pp. 1–82.
- [25] **D. Percivale**
Uniqueness in Elastic Bounce Problem
I. Journal of Differential Equations, 56 (1985), pp. 206–215.
- [26] **M. Schatzman**
A Class of Nonlinear Differential Equations of Second Order in Time
Nonlinear Ana Theory Meth and Appli, 2 (1978), pp. 355–373.
- [27] **M. Schatzman**
Uniqueness and Continuous dependence on data for a one dimensional impact problems.
Mathematical and Computational Modelling, 28,4-8 (1998), pp. 1–18.
- [28] **L. Schwartz**
Analyse hilbertienne
Masson, Paris, 1978.
- [29] **D. E. Stewart**
An Implicit Time-Stepping Scheme for a Rigid-Body Dynamics with Inelastic Collisions and Coulomb Friction
Int. J. Num. Meth. Eng, 39 (1996), pp. 2673–2691.
- [30] **D. E. Stewart**
Convergence of a Time-Stepping Scheme for a Rigid-Body Dynamics and Resolution of Painlevé's Problem
Arch. Rational. Mech. Ana, 145 (1998), pp. 215–260.
- [31] **D. Vola**
Frottement et instabilités en dynamique : bruits de crissement
Thèse de mécanique, Université d'Aix-Marseille II, 1998.

- [32] **D. Vola, E. Pratt, M. Raous, et M. Jean**
Consistent Time Discretization for a Dynamical Frictional Contact Problem and Complementarity Techniques
Revue Européenne des éléments finis, 7 (1998), pp. 149–162.

- [33] **D. Vola, M. Raous, et J.A.C. Martins**
Friction and Instability of Steady Sliding : Squeal of a Rubber/Glass Contact
Int. J. Numer. Meth. Engrg., 46 (1999), pp. 1699–1720.

Index des notations

B

$BV(I; \mathbb{R}^n)$	ensemble des fonctions à variation bornée de I à valeurs dans \mathbb{R}^n ,
$\mathcal{B}(a, r)$	boule ouverte de centre a et de rayon r ,
\mathcal{B}	la boule unité fermée euclidienne de \mathbb{R}^{n-1} ,

C

$\mathcal{C}^0(I; \mathbb{R}^n)$	ensemble des fonctions continues de I à valeurs dans \mathbb{R}^n ,
$\mathcal{C}^\infty(I; \mathbb{R}^n)$	ensemble des fonctions infiniment continûment dérivables de I à valeurs dans \mathbb{R}^n ,
$\mathcal{C}(\mathcal{R})$	disque fermé de centre 0 de rayon \mathcal{R} ,

D

$\det \underline{\underline{K}}$	déterminant de la matrice de raideur,
\mathcal{D}	ensemble des points de discontinuité de la vitesse,

F

\underline{F}	force extérieure exercée sur la particule,
\underline{F}_K	suite d'approximation de la force \underline{F} ,

H

h	pas de discrétisation en temps,
-----	---------------------------------

I

\mathcal{I}_K	fonction indicatrice de l'ensemble K ,
$\underline{\underline{I}}$	matrice identité,

K

$\underline{\underline{K}}$	matrice de rigidité carrée réelle d'ordre n ,
$\underline{\underline{K}}^{-1}$	inverse de la matrice $\underline{\underline{K}}$,
$\underline{\underline{K}}_T$	matrice carrée réelle symétrique d'ordre $n - 1$,
K_μ	cône de frottement de Coulomb,

L

$L^1(I; \mathbb{R}^n)$ ensemble des fonctions intégrables définies sur I à valeurs dans \mathbb{R}^n ,

M

m masse de la particule,
 $\mathcal{M}(I; \mathbb{R}^n)$ ensemble des mesures de I à valeurs dans \mathbb{R}^n ,
 $MMA(I; \mathbb{R}^n)$ espace vectoriel des fonctions de $[0, \hat{T}]$ dans \mathbb{R}^n dont la dérivée seconde au sens des distributions est une mesure,

N

\mathbb{N} ensemble des entiers naturels,
 \mathbb{N}^* ensemble des entiers naturels strictement positifs,

R

\underline{R} réaction de contact,
 \underline{R}^{eq} réaction de contact à l'équilibre,
 \underline{R}_K suite d'approximation de la réaction,
 r densité de la réaction,
 \mathbb{R} ensemble des nombres réels,

S

$\text{supp} f$ support de la fonction f ,
 sign fonction signe,

T

t_i^{imp} instant d'impact,
 t_i^{pointe} instant où la masse se trouve à la pointe du cône de frottement,

U

\underline{U} vecteur déplacement,
 \underline{U}^{eq} vecteur déplacement à l'équilibre,
 \underline{U}^{affl} vecteur déplacement à l'équilibre dans le cas du contact affleurant,
 \underline{U}_0 vecteur déplacement initial,
 \underline{U}_K suite d'approximation du déplacement,
 $\dot{\underline{U}}$ vitesse de la particule,
 $\dot{\underline{U}}^+$ vitesse à droite,
 $\dot{\underline{U}}^-$ vitesse à gauche,
 $\dot{\underline{U}}_K$ suite d'approximation de la vitesse,
 $\dot{\underline{U}}_K^{libre}$ suite d'approximation de la vitesse de la particule libre,
 $\ddot{\underline{U}}$ mesure différentielle représentant l'accélération,
 $\ddot{\underline{U}}_K$ suite d'approximation de l'accélération,

V

\underline{V}_0	vecteur vitesse initiale,
V	espace vectoriel,
V'	dual de l'espace vectoriel V ,
$\text{Var}(f; [a, b])$	variation de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$,

W

\underline{W}	terme de couplage entre degrés de liberté normal et tangentiels de la matrice de raideur \underline{K} ,
$W^{1,1}(I; \mathbb{R}^n)$	espace de Sobolev d'ordre 1,
$W^{2,1}(I; \mathbb{R}^n)$	$= \{\underline{w} \in W^{1,1}(I; \mathbb{R}^n), \underline{\dot{w}} \in W^{1,1}(I; \mathbb{R}^n)\}$, espace de Sobolev,

X

X_N	composante normale de \underline{X} ,
\underline{X}_T	composante tangentielle de \underline{X} ,
\underline{X}^j	approximation de la quantité \underline{X} au temps t_j ,
\underline{X}_a	fonction analytique,

Autres notations

δ_a	mesure de Dirac au point a ,
μ	coefficient de frottement constant,
$\chi_{] \cdot [}$	fonction caractéristique de l'intervalle $] \cdot [$,

Symboles

$ \cdot $	valeur absolue,
$\ \cdot\ $	norme euclidienne dans \mathbb{R}^d , $2 \leq d \leq n$,
$\ \cdot\ _{\underline{K}_T}$	norme sur \mathbb{R}^{n-1} associée au produit scalaire défini par la matrice \underline{K}_T ,
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit scalaire associé à la norme euclidienne,
$\ \cdot\ _{L^1(I; \mathbb{R}^n)}$	norme de l'ensemble des fonctions intégrables,
$\langle x \rangle^+$	maximum entre 0 et x ,
J^*	fonction conjuguée de J ,
∂J	sous-différentiel de J ,
$\frac{d^n J}{dt^n}$	dérivée n -ième de la fonction J par rapport à t .

Dynamique et stabilité d'un système discret en présence de contact et de frottement

L'objectif de ce travail est d'étudier la stabilité des états d'équilibre d'un système dynamique simple en présence de contact unilatéral et de frottement de Coulomb. L'application des théorèmes classiques de stabilité n'étant pas possible pour ce type de problème, on revient à la définition de la stabilité en étudiant l'évolution en temps de la distance entre une solution d'équilibre et la trajectoire solution d'un problème de Cauchy avec des données hors d'équilibre. Par conséquent, les questions d'existence et d'unicité doivent être abordées au préalable. L'existence d'une solution au problème de Cauchy est obtenue sous l'hypothèse où la force extérieure est intégrable. Se pose alors la question d'unicité de solution. Un contre-exemple démontre que l'unicité n'est pas vraie en général, même pour des forces extérieures ayant une régularité C^∞ . En revanche, on montre que le problème admet une unique solution si la force extérieure est analytique. On détermine ensuite l'ensemble des états d'équilibre sous une force constante. Sachant que la dynamique est bien posée pour des données analytiques, toute la suite est consacrée à l'étude de la stabilité de ces états d'équilibre. Les caractéristiques de la dynamique dans l'espace des réactions conduisent alors à introduire de nouvelles notions de stabilité propres aux systèmes en présence de contact et de frottement.

Mots clés : Dynamique discrète, Contact unilatéral, Frottement de Coulomb, Système de Klarbring, Stabilité

Dynamics and stability for a simple model with contact and friction

This work aims at studying the stability of equilibrium states for a mechanical system involving unilateral contact with Coulomb friction. The hypothesis of the classical stability theorems are not verified and it is necessary to come back to the definition of stability by studying the evolution in time of the distance between an equilibrium and the solution of a Cauchy problem whose initial conditions belong to a given neighbourhood of the equilibrium. Consequently, we are concerned by the existence and the uniqueness of solutions to the system with Cauchy data. The existence of the solution is obtained under the hypothesis that the external force is integrable. Then the question of uniqueness of the solution arises. A counter-example shows that even in the case where the external force has C^∞ regularity, the uniqueness of the solution does not hold in general. We show that the Cauchy problem has a single solution if the external force is an analytic function of time. Then we determine the set of solutions of the equilibrium problem under a constant force. The dynamic problem being well-posed for analytic data, our concern is the study of the stability of these equilibrium states. The specificity of the dynamic problem in the space of the reactions lead to introduce new concepts of stability for systems with unilateral contact and Coulomb friction.

Key words : Discrete dynamics, unilateral Contact, Coulomb friction, Klarbring's system, Stability
